FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound
A.M.N.
191

LIBRARY OF THE AMERICAN MUSEUM OF NATURAL HISTORY

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06 (47.4) S3

TOM. III.

ad Annum MDCCL. et MDCCLI.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLIII.

4/18/1916/collated

16.80267 April 28

Imprimatur

Cyrillus Comes de Raſumowsky.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS III.

* * * * * * * * *

Cum *Academia Scientiarum Imperialis*, Lector candide, *Nouorum Commentariorum Tomum* hunc *tertium* exhibere curauit, nihil eſt, quod reſtat, quam vt breuibus Te moneamus, ſecundum ſtatuta eſſe decretum, claſſes, quibus *Academia* conſtat, Tibi, vt in praecedentibus tomis ſunt diſpoſitae, iterum tradi. *Mathematica* itaque claſſis decem, P*hyſico* - *Mathematica* quinque, *Phyſica* duas, et *Aſtronomica* quatuor tantum ſiſtit diſſertationes. Praeterea autem pro more ac inſtituto breuis diſſertationum additur conſpectus. Ceterum Tuum, Lector beneuole, erit iudicare. Vale.

MATHEMATICA.

METHODVS AEQVATIONES DIFFERENTIALES ALTIORVM GRADVVM INTEGRANDI VLTERIVS PROMOTA AVCTORE *L. EVLERO.*

Haec Diſſertatio ſine dubio inſigne continet calculi integralis augmentum; cum in ea tradatur methodus innumerabiles aequationes altiorum graduum ita expedite integrandi, vt per vnam operationem ſtatim aequatio integralis obtineatur, neque opus ſit, tot integrationes ſucceſſiue inſtituere, quoti eſt gradus aequatio differentialis propoſita, cuiusmodi operationes aliae methodi adhuc cognitae requirant. Tradiderat autem Auctor *in VII. Volumine Miſcell: Berolinenſium* iam ſpecimen huius methodi, vbi docuerat vna operatione integrale huius aequationis inuenire:

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

vbi elementum dx ſumtum eſt conſtans, litterae autem A, B, C, D etc. coefficientes denotant quoscunque conſtantes: nunc autem hanc methodum extendit ad hanc formam multo latius patentem:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

vbi littera X denotat quantitatem quamcunque ex variabili x et conſtantibus vtcunque conflatam. Omnino hic notatu eſt dignum, quod operatio ſemper ſuccedat, ad quemcunque etiam gradum differentialium aequatio aſcendat, ne gradu quidem infiniteſimo excluſo, cuius eximia exempla Auctor in ſequentibus exhibet. In hac autem Diſſertatione primum caſum admodum ſimplicem hac ae-

quatione

quatione $d^2y = r\,dx^2$ contentum methodo vulgari perſe-
quitur, oſtendens quam prolixum ac taedioſum calculum eius ſolutio requirat, quippe quo tandem ad aequationem quidem differentialem primi ordinis perducitur, cuius autem integratio grauibus adhuc premitur difficultatibus. Inde tamen non leuibus in ſubſidium vocatis artificiis elicit integrale quidem, ſed tantum particulare, ex quo denique per nouam operationem integrale completum colligit. Tum vero duas praeterea integrationes inſtituere oportet, antequam ſolutio ad finem ſit perducta. Ex quo facilius iudicium de praeſtantia nouae methodi ferre licebit, cuius beneficio ſine tam multis et moleſtis ambagibus vna eaque facillima operatione non ſolum haec ſpecialis aequatio, ſed generalis exhibita ita perfecte reſoluitur, vt ſtatim aequatio integralis completa reperiatur. Operatio autem illa reducitur ad reſolutionem aequationis Algebraicae, cuius forma ita ex propoſita aequatione differentiali deriuatur, vt ſit

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium in reſolutione huius aequationis Algebraicae continetur, quod quidem cum de integratione eſt quaeſtio merito pro facillimo habetur. Huius ſcilicet aequationis cunctae quaerendae ſunt radices, earumque quaelibet ſuppeditat ope regulae ſimpliciſſimae portionem integralis quaeſiti, ita vt omnibus radicibus hoc modo pertractatis vniuerſum integrale completum obtineatur. Difficultate quidem haec methodus impediri videtur iis caſibus, quibus illa aequatio Algebraica radices habet vel aequales vel impoſſibiles; ſed et huic incommodo feliciter occurrit Auctor, dum pro his caſibus peculiares

praebet

praebet regulas, quarum ope tota operatio aeque expedite perfici poteſt.

Si quis quaerat, quemnam vſum huiusmodi ſpeculationes, quae fortaſſe plerisque nimis ſteriles videantur, habere queant, ei audacter reſpondere licet, nullum fere extare Problema Phyſicum, vel ad vitam communem pertinens, cuius ſolutio adaequata non plerumque ad aequationem differentialem altioris cuiusdam ordinis perducatur; ex quo facile intelligere licet, quam parum tales ſpeculationes contemni mereantur.

DE SERIERVM DETERMINATIONE SEV NOVA METHODVS INVENIENDI TERMINOS GENERALES SERIERVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Quanti ſit vſus doctrina ſerierum per vniuerſam Analyſin ſublimiorem, eiusque imprimis applicationem ad problemata praxi accommodata, nemo in hoc ſtudiorum genere vel leuiter verſatus ignorat; vnde quae inueſtigationes circa naturam ſerierum penitius perſcrutandam inſtitui ſolent, minime vſu carere ſunt cenſendae. In hac autem Diſſertatione Auctor non parum mirabilia phaenomena circa ſeries aperit; primum ſcilicet oſtendit, ſeriem nondum pro determinata eſſe habendam, etiamſi omnes eius termini ſint dati, qui nimirum indicibus integris reſpondeant: cum innumerabiles diuerſae ſeries inueniri queant, quibus iidem termini conueniant. Perinde quippe ſerierum ratio eſt comparata atque linearum curuarum, quatenus per data puncta ſunt ducendae, etiamſi enim punctorum numerus ſit infinitus, nemo tamen Geometra ignorat, infinita exhiberi poſſe genera curuarum, quae

quae omnes per eadem puncta tranſeant. Simili modo quamuis infiniti termini ſeriei ſint dati, inde tamen ipſa ſeries non determinatur, neque vera eius natura intelligitur; tum autem demum naturam ſeriei cognoſcimus, quando non ſolum omnes terminos, qui indicibus integris conueniunt, ſed etiam eos, qui indicibus fractis quibuscunque reſpondent aſſignare valemus. Talem autem perfectam cognitionem continet terminus ſeriei, qui vocari ſolet generalis, quippe quo generaliter deſignatur terminus cuicunque indici indefinito reſpondens; ita vt cognito demum termino generali ipſa ſeriei natura nobis plene perſpecta eſſe ſit cenſenda. Plerique alii modi, quibus vulgo ſeries deſcribi ſolent, eodem laborant defectu, vt iis ſeries non perfecte determinentur; veluti ſi ſeries numerorum ita definiatur, vt primus eius terminus vnitas, quilibet vero ſequentium praecedentem vnitate ſuperare dicatur, quis non crederet, ſeriem numerorum naturalium hoc modo perfecte determinari, ita, vt terminus quisque in genere indici ſuo aequalis ſtatui queat? Seu vt terminus indici indefinito x reſpondens, ipſe ſit $= x$. Nihilo vero minus ab Auctore innumerabiles aliae formae termini generalis proferuntur, qui omnes praeſcriptis conditionibus aeque ſatisfaciant. Omnes ſcilicet hae ſeries in hoc conueniunt, vt primus terminus ſit 1, ſecundus 2, tertius 3, quartus 4, et ita porro, in genere vt quoties index x fuerit numerus integer, terminus reſpondens ipſi ſit aequalis: in eo autem diſcrepabunt, quod ponendis pro x numeris fractis, termini reſpondentes inter ſe diſſideant. Auctor porro obſeruat eundem determinationis defectum locum habere, quoties quilibet ſeriei terminus non per in-

 dicem

dicem ſolum, ſed inſuper per terminos quosdam praecedentes definitur: et cum his caſibus infiniti termini generales aeque conditionem adimpleant, hoc problema ſoluendum ſuſcepit, vt propoſita tali lege progreſſionis omnes terminos generales ei ſatisfacientes inueniat. Quod problema adeo pro difficillimo eſt habendum, quod perducat ad ſolutionem aequationis differentialis infiniti gradus; commode hic autem vſu venit, vt haec aequatio in illis formis, quarum reſolutionem Auctor in ſuperiori Diſſertatione docuit, contineatur; hocque adeo argumentum ipſi praeclaram occaſionem praebuerit methodi ante traditae, eximium vſum oſtendendi. Eius methodi ſcilicet beneficio plura genera ſerierum, in quibus quilibet terminus vel per ſolos terminos antecedentes, vel inſuper per indicem definitur, percurrit, earumque terminos generales omnes aſſignat: ex quo haec methodus merito pro maxime naturali, atque indoli ipſarum quaeſtionum conformi habetur, quippe qua vera huiusmodi ſerierum natura perfectiſſime cognoſcitur.

CONSIDERATIO QVARVMDAM SERIERVM QVAE SINGVLARIBVS PROPRIETATIBVS SVNT PRAEDITAE AVCTORE *L. EVLERO.*

In praecedente Diſſertatione Auctor iam mentionem fecerat alicuius ſeriei ſingularis, cuius terminus primus eſt 0, decimus 1, centeſimus 2, milleſimus 3, decies milleſimus 4 etc. ita, vt in genere indici, qui poteſtas quaecunque fuerit denarii, reſpondeat terminus, ipſi exponenti huius poteſtatis, ſiquidem ſit numerus integer, aequalis. Cui fundamento cum logarithmi ſint ſuperſtructi

cti, primo intuitu videri poſſet, quemuis ſeriei terminum eſſe logarithmum ſui indicis. Interim tamen oſtendit Auctor terminum nonum huius ſeriei eſſe 0, 897050585, ideoque logarithmo nouenarii notabiliter minorem; quod inſigne eſt exemplum ſeriei cum ſerie logarithmorum infinitos terminos communes habentis, neque tamen cum ea congruentis, cuiusmodi ſerierum genera in ſuperiore diſſertatione fuſius eſt perſecutus. Hic autem caſum memoratum ſingularem accuratius euoluit, qui in ſequenti forma generaliori continetur, vt indici cuicunque indefinito x conueniat in ſerie terminus

$$= \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \text{etc.}$$

quae expreſſio etſi eſt in infinitum continuanda, tamen quoties x ſumitur aequalis cuipiam poteſtati rationali ipſius a ea non ſolum abrumpatur, ſed etiam ipſi exponenti ipſius a fiat aequalis: hinc autem caſus ſupra memoratus naſcitur, ſi pro a denarius ſumatur. Priorem autem formam generaliorem contemplans animaduertit, ſi terminus indici x reſpondet, ponatur $= s$, is vero qui indici $a\,x$ reſpondet $=$ t, fore:

$$1 + s - t = (1 - x)(1 - \tfrac{x}{a})(1 - \tfrac{x}{a^2})(1 - \tfrac{x}{a^3})(1 - \tfrac{x}{a^4}) \text{ etc.}$$

vnde liquet, ſi pro x capiatur poteſtas quaepiam ipſius a ob vnum factorem certo euaneſcentem eſſe $t = 1 + s$. Plura autem alia non contemnenda conſectaria hanc formam variis modis transmutando deducit, vnde doctrina ſerierum non mediocriter amplificari eſt exiſtimanda: veluti pro quadratura circuli, ſi ratio diametri ad peripheriam denotetur per $1 : \pi$ hanc ſatis concinnam conſecutus eſt ſeriem:

$$\frac{9}{4}\pi + 8 = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9} + \text{etc.}$$

Poſtea vero ex eadem ſerie generali plures alias formas deriuat, in quibus euoluendis multa inſignia calculi artificia cernuntur, quae hac occaſione percepiſſe in aliis inueſtigationibus operae pretium videtur.

His errata, a *Clar. Auctore* transmiſſa, ſunt adiicienda.

Pagin.	Linea	loco	lege
4	14	qui variabilis	quia variabilis
9	6	ſubſtitutione ſuppeditat	ſubſtitutiones ſuppeditat
10	9	ſuppedituro	ſuppeditare
	19	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha\delta\varepsilon)^2$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha-\varepsilon)^2$
12	23	$\alpha e^{kx\ cof.\ \Phi}$ ſin. kz ſin. Φ	$\alpha e^{kx\ cof.\ \Phi}$ ſin. kx ſin. Φ
13	21	quotumque	quotcunque
14	4	$2\mathfrak{C}x + \mathfrak{D}x^2$	$2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2$
	13	$\mathfrak{D}Ax^3 = Av$	$\mathfrak{D}Ax^3 + Av$
17	15	$P = D(z+a)$ etc.	$P = \Delta(z+a)$ etc.
	penult:	$+\frac{\Delta d^n y}{d y^n}$	$+\frac{\Delta d^n y}{d x^n}$
	vltima	$+\frac{\alpha C' ddy}{dx^2}$	$+\frac{\alpha C' ddy}{dx^2}$
19	3	aequatione denuo	aequationem denuo
	11	$D' = \varepsilon D'' = C''$	$D' = \varepsilon D'' + C''$
20	4	per $e^{\gamma x}dx$, ſit	per $e^{\gamma x}dx$. Sit
23	15-16	imaginariae	imaginarii
28	5	multiplicato	multiplicati
29	16 ſeq.	$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}Xdx = \begin{matrix} + \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \\ + \text{ etc.}\end{matrix}$	$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}Xdx = \begin{cases} + \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \\ + \quad \text{etc.}\end{cases}$

Pagina	Linea	loco	lege
29	16 ſeq:	$e^{\mathfrak{G}x}\int e^{-\mathfrak{G}x} X\,dx = \begin{matrix} + \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \\ + \end{matrix}$	$e^{\mathfrak{G}x}\int e^{-\mathfrak{G}x} X\,dx = \begin{cases} + \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \\ + \end{cases}$
34	penult:	ad formulam $\sqrt{}$	ad formulam V
35	12	mula $\sqrt{}$	mula V
37	5	delinit	definit
38	20	xx et ponatur $- = \frac{1}{4}$	xx, et ponatur $x = \frac{1}{5}$
39	3	fit ſemper	fiat ſemper
40	17	affirmationis	determinationis
42	15	cuius radices $= 1$	cuius radius $= 1$
	20	poſito enim $x = \frac{\pm}{4}$	poſito enim $x = \frac{1}{4}$
44	vltima	$2(1+\frac{z}{n})$ ſin. $\frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}$	$2(1+\frac{z}{n}$ ſin. vers. $\frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}$
48	20	$(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{33\pi\pi})(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{69\pi\pi})$	$(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{36\pi\pi})(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{64\pi\pi})$
50	1	ex hac fonte	ex hoc fonte
51	antep:	$= \frac{1}{954}\pi^4$	$= \frac{1}{95}\pi^4$
	penult:	$= \frac{1}{94}\,5\,\pi^6$	$= \frac{1}{945}\pi^6$
55	antep:	quamcunque ipſarum	quamcunque parem ipſarum
57	14	$Z = (1-\frac{z}{n})(1$ etc.	$Z = (1-\frac{z}{\lambda})(1$ etc.
	19	Hisque terminis infinitas reſolutis	Hisque terminis in ſeries infinitas reſolutis
58	1	ponatur $\frac{dZ}{Zdz} - A +$	ponatur $\frac{dZ}{Zdz} = A +$
	14	$-8\lambda^3 C$	$-8\lambda^3 \mathfrak{C}$
59	antep:	$-\frac{1}{4\eta^3(1-m)}$	$-\frac{1}{4\lambda^3(1-m)}$
62	3	$\frac{-1}{2aa} = -\frac{1}{2(2\ +1)^2}$	$\frac{-1}{2aa} = -\frac{1}{2(2k+1)^2}$
63	3	numerus integus	numerus integer
64	23	$1 = \alpha e^{-2z} + \mathfrak{G} e^{-2z}$	$1 = \alpha e^{-z} + \mathfrak{G} e^{-2z}$
	vlt:	euolue oportet	euolui oportet
67	4	ſecundum Moioraeum	ſecundum Moiuraeum

Pagina	Linea	loco	lege
68	12	haberi ſole.	haberi ſolet.
	30	inducent,	induant,
70	10	$-\!\!\vdash \gamma u^{n-3}\ \delta u^{n-4}$	$+ \gamma u^{n-1} + \delta u^{n-4}$
87	3	obrumpi,	abrumpi
	20	aequatio ſtatuatur	aequalis ſtatuatur
88	16	notabiliter *a l x*	notabiliter a *l x*
89	8	tamen non niſi	tamen non valet, niſi
90	18	poſito $x = a'$	poſito $x = a$
93	20	valores exacto	valores exacte
94	20	cum infinitiſſima ſit	cum infiniterima ſit
96	9	$C = \frac{a^2}{(1-\cdot)(1-\cdot a^2)}$	$C = \frac{a^2}{(1-a)(1-ca)^2}$
105	vlt:	vt Geometriae	vt Geometrae

DE DIVISORIBVS NVMERORVM INDAGANDIS AVCTORE G. *W. KRAFFT.*

Hoc problemate Auctor, numerum propoſitum ex certis regulis diuiſores admittere ſimplices, tradere ſtudet; hanc ob cauſam in generales numerorum formulas inquirit, eruitque quomodocunque, quosnam illae admittant diuiſores. Talem numerum generaliſſime expreſſum examinat, et non nulla Theoremata deducit, quorum omnium id, quod in *Actor. Erudit. Lipſ. Supplementis Tom 6 p.* 471. legitur, eſt elegans: ſi numero, ſcilicet, cuiuis quadrato ſubtrahatur binarius, reſiduum nunquam diuidi poſſe per ternarium. Ex hoc itaque ingenioſum ſoluitur problema: dato numero quocunque ita mutare notam vnicam, vt certum ſit, numerum ita mutatum per omnes transpoſitiones poſſibiles non exhibere quadratum. Quum autem ex allatis formulis ad inda-

gandam

gandum numeri alicuius dati diuiſorem parum auxilii trahi poteſt: hinc aliam viam, quae aliquando plus ſubſidii ſubminiſtrabit, tentat, quamuis Arithmetica tali formula generali vnica deſtituatur, quae numeros primos omnes ſucceſſiue exhibeat. Tandem omnia exemplis illuſtrat, et, quo modo diuiſorem expiſcari poſſit, inquirit.

DE PARTITIONE NVMERORVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Problema de partitione numerorum Auctori quondam a *Cl. Profeſſore Berolinenſi Naudaeo* fuit oblatum, qui pro caſu ſpeciali quaeſiuerat, quot variis modis numerus 50 in ſeptem partes diſpertiri poſſit. Problema hoc primo intuitu ita comparatum videbatur, vt aliter niſi per inductionem reſolui non poſſet, quo fere modo pleraque problemata ad artem combinatoriam pertinentia reſolui ſolent. Qui ſcilicet eius ſolutionem ſuſcipere velit, primo quaeret, quot variis modis quisque in duas partes diſcerpi poſſit, vbi quidem nullam difficultatem offendet, deinde procedet ad diuiſionem in tres partes, quod negotium etiam nunc ſatis commode ſuccedet. In diuiſione in quatuor partes fortaſſe iam haerebit, neque ſtatim perſpiciet, quomodo numerus partitionum cum numero partiendo increſcat, inductione tamen fretus, et hanc progreſſionis legem diuinabit, Quinque partitio ipſi iam maiores creabit moleſtias, ac niſi omni circumſpectione vtatur, verendum eſt, ne inductioni, vtcunque certa ipſi videatur, nimis confidens in errorem inducatur; quod eo magis eſt pertimeſcendum in partitione in plures partes; vti etiam ipſe problematis Auctor fuit ſeductus, et pro caſu

caſu propoſito in diuiſione numeri 50 in ſeptem partes, poſt taediosiſſimos calculos enormiter a veritate aberrauit, neque etiam alii inſignes Mathematici hac via incedentes ab errore ſe vindicare valuerunt: qui autem actu omnes partitiones dinumerare voluerit, non ſolum in immenſum laborem ſe immergit, ſed omni etiam attentione adhibita vix cauebit, ne turpiter decipiatur. Cum igitur hoc problema tam inſigne ſpecimen contineat, quam parum inductioni vel maxime confirmatae ſit fidendum, eo pluris eſt aeſtimandum Auctoris ſtudium, quo certa methodo ſolutionem iſtius problematis inueſtigauit, cum vix vlla alia via praeter inductionem ad eam patere videatur.

Nihil igitur inductioni tribuens Auctor ex certiſſimis Analyſeos principiis eiusmodi formulas hauſit, quae pro quocunque numero propoſito ſtatim oſtendunt, quot variis modis is in tot, quot lubuerit, partes diuidi poſſit, ita, vt etiam circa maximos numeros nullum dubium ſupereſſe queat. Problema autem hic geminum tractat, quorum altero quaeritur, quot modis datus numerus in tot partes inaequales tantum, quot requiruntur, diſſecari poſſit; in altero vero partium aequalitas non excluditur. Ita in exemplo initio memorato inuenit numerum 50 omnino 522 modis in ſeptem partes inter ſe inaequales diſtribui poſſe, aequalitate autem partium non excluſa numerum partitionum omnium eſſe 8946, qui ergo numerus quaeſtioni primum propoſitae ſatisfacit.

Pluribus aliis modis problema variari poteſt, dum ſcilicet ſingulae partes datae indolis eſſe iubentur, veluti numeri impares, vel quadrati, vel termini progreſſionis Geometricae duplae etc. partium numero vel praeſcripto, vel

vel ſecus: Auctoris autem methodus aeque patet ad omnia huiusmodi problemata ſoluenda.

Subiungit denique Auctor tabulam ſatis amplam, ex qua reſponſiones ad pleraſque huius generis quaeſtiones ſine vllo labore depromere licet; quae multo longius eſt continuata, quam in Auctoris *Introductione in Analyſin*, vbi idem argumentum iam tractauerat, hic autem ſtudioſius expoliuit. Ceterum haec Diſſertatio referta eſt plurimis tam egregiis artificiis, quam nouis et notatu dignis obſeruationibus circa naturam ſerierum, vnde eius vſus multo latius patere videtur: neque vllum eſt dubium, quin ex eodem fonte plurima alia argumenta feliciſſimo cum ſucceſſu expediri queant.

Nunc errata, a *Clar. Auctore* tranſmiſſa, communicamus.

Pagina	Linea	loco	lege
125	7	Profeſſore Haude	Profeſſore Naude
	14	*partio-*	*partitio-*
126	24	$12=3+3+6$; $11=2+4+5$	$12=3+3+6$; $12=3+4+5$
129	12	factorum, ſiue	ſiue factorum
138	11	numerus 6 ex numeris	numerus *n* ex numeris
143	4	Si hae ſeries cum illis,	Si hae ſeries cnm illis conferantur;
146	antep.	$n^{(2)}=n^{(2)}+(n-2)^{(2)}$	$n^{(2)}=n^{(1)}+(n-2)^{(2)}$
147	2	Seu cum ſeries 𝔄	Seu cum ſeriei 𝔄
	22	$1+1^{(3)}x+2^{(3)}x^2$ etc.	*tota haec linea omittatur*
149	6	fiet manifeſtum:	fiet manifeſta:

Pagina	Linea	loco	lege
152	16	crit $20^{(2)} = 192$	crit $20^{(5)} = 192$
154	8	$+(11-8)^{(4)}+$	$+(n-8)^{(4)}+$
155	20	eſſe $x^{n(3n\pm 1)}$	eſſe $x^{n(3n\pm 1):2}$
	vlt.	$+(n-40)^{(\infty)}(n-51)^{(\infty)}-$	$+(n-40)^{(\infty)}-(n-51)^{(\infty)}$.
156	1	locum haberi	locum habere

MEDITATIONES DE QVANTITATIBVS IMAGINARIIS AVCTORE *HENRICO KUHNIO.*

Haec diſſertatio talis eſt valoris, de qua nihil, propter eiusdem modum procedendi, eſt dicendum; hinc velimus, vt lectores diſſertationem ipſam introſpiciant.

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI AVCTORE *L. EVLERO.*

Problema, cuius Auctor hic plures conſtructiones tradit, ita ſe habet, vt ex datis tam quantitate, quam poſitione diametris coniugatis ellipſeos, eius axes principales definiri debeant. *Celeb: Prof: Krafft* eiusdem problematis in his *Comment.* iam ſatis elegantem dedit conſtructionem, quod igitur minime pro nouo eſt habendum; verum ita eſt comparatum, vt calculum proſequendo ſecundum regulas cognitas plerumque ad conſtructionem admodum complicatam, et a concinnitate, quae in Geometria potiſſimum deſiderari ſolet, multum remotam perueniatur. Exhibet igitur Auctor primum huius problematis tres conſtructiones, quibus calculum, cui illae innituntur, ſubiungit denique, vero ipſe ingenue fatetur, eam conſtructionem, quae iam in Pappi *collectionibus*, ſed ſine demonſtratione, reperitur, his ob concinnitatem palmam longe praeripere. Demonſtratio-

nem

nem ergo huius conſtructionis Geometricam adornat more veterum, ac ſub finem nouam multoque ſimpliciorem conſtructionem doceto, quae et illi longe praeferenda videtur.

DE PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM A FIGVRA EORVM NON SPHAERICA ORIVNDA AVCTORE L. *EVLERO.*

Ante omnia Lectores ſunt certiores faciendi, hanc Diſſertationem iam ante ad Academiam eſſe transmiſſam, quam quaeſtio de ſufficientia Theoriae *Neutonianae* ad omnes motus lunae inaequalitates explicandas iudicio Academiae erat compoſita. Auctor autem iam palam eſt profeſſus, ſe ante hac in ea fuiſſe opinione, quod Theoria *Neutoni* ad motum Apogei Lunae explicandum minime ſufficeret, eiusque tantum ſemiſſem propemodum produceret, quam in ſententiam plura huius Diſſertationis momenta ſunt conſcripta. Poſtquam autem *Celeb. Clairaut*, qui ipſe ante hac hanc opinionem propugnauerat, ſolidiſſimis rationibus contrarium demonſtrauiſſet, Auctor quoque ipſi ſine mora eſt adſtipulatus. Tantum autem abeſt, vt iſte error quicquam de pretio huius Diſſertationis, ſi quod habet, detrahat, vt potius eius concluſio veritatem non mediocriter confirmet. Cum enim hic dilucide oſtendatur, Lunae figuram oblongatam, quantacunque, quidem admitti poteſt, nullo modo tantopere motum Apogei accelerare poſſe, quantum Theoria perperam explicata requirere videbatur, hoc ipſum iam validi argumenti loco eſſe debet, veritatem ex ſola Lunae figura ſaluari non poſſe. Namque ſi contrarium eueniſſet,

 leuis

leuisque corporis lunaris a figura ſphaerica aberratio iam ſatis notabilem motus Apogei accelerationem producere eſſet inuenta, merito in ambiguo relinqueremur, vtrum verus Apogei motus potius Theoriae *Neutonianae* felicius euolutae, quam figurae corporis Lunae eſſet tribuendus? Praeſens igitur quaeſtio, quam Auctor tractandam ſuſcepit etiam poſt demonſtratum Theoriae *Neutonianae* cum veritate conſenſum maximi eſt momenti, atque adeo ad eum vberius enucleandum omnino eſt neceſſaria. Cum enim certum ſit, ſi corpus ſphaericum iugiter ad punctum fixum attrahatur in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, id ita in elipſi aliaue ſectione conica motum iri, vt linea abſidum ſeu poſitio axis conſtanter immutata ſeruetur, plurimum profecto intereſt noſſe, num iſta lex non a figura corporis, ſi non fuerit ſphaerica, perturbetur? ſi ſcilicet ſingulae corporis particulae maſſis ſuis proportionaliter ad centrum virium ſollicitari aſſumantur. Quemadmodum enim ſi corpus attractum et globus media directio ſollicitationum ſemper per eius centrum grauitatis tranſit, ita ſi corpus a figura globoſa recedit, media directio id plerumque praetergreditur, vnde fit, vt corpori tam motus circa centrum grauitatis imprimatur, quam eius motus progreſſiuus perturbetur. Oſtendit autem Auctor hanc perturbationem ſemper in aphelio ſeu Apogeo potiſſimum cerni, quod inde in conſequentia promoueatur. Ceterum hoc problema vti et reliqua, quae ad motum Lunae definiendum pertinent, ſolutu eſt difficillimum, ac ſi quis ſolutionem generalem, pro qua Auctor hic ſpecialem ad Lunam accommodauit, deſideraret, ei fortaſſe etiamnum perfecte ſatisfieri non poſſet. Quoniam igitur

igitur hoc tempore Geometrae in talibus problematibus vires praecipue ſuas exercere ſolent, hoc problema, de quo ante hac vix eſſe cogitatum non parum mirandum videtur, omnino dignum videtur, cuius amplior ſolutio in Aſtronomiae Theoreticae incrementum ſollicite inquiratur. Hinc autem non ſolum leuiores quaedam inaequalitates, quae in motu planetarum obſeruantur, originem trahere videntur, ſed etiam quae de motu vertiginis adhuc ſunt explorata, ante in lucem multo maiorem collocabuntur.

DE MACHINIS IN GENERE AUCTORE *L. EULERO.*

Quam imperfecta adhuc ſit Machinarum cognitio Theoretica, et quantum a ſcopo ii aberrent, qui vulgo ſe Theoriam Machinarum tradidiſſe prae ſe ferunt, Auctor in hac Diſſertatione fuſius commonſtrat; atque defectus huius cognitionis iam dudum in vniuerſum animaduerſus videtur, cum nemo fere Machinae per ſolam Theoriam inuentae fidere ſoleat, niſi ante per experientiam fuerit comprobata. Cuius rei cauſam Auctor neutiquam, vt vulgo fieri ſolet, in frictione aliisue externis circumſtantiis neglectis quaerendam eſſe oſtendet, ſed potius in eo, quod vulgaris Machinarum cognitio admodum ſit manca, neque nomen Theoriae mereatur. Tota enim iſthaec falſo nominata Theoria ſolis principiis aequilibrii innititur, atque tum ſolum in vſum recte vocari poſſet, quando quodpiam onus ope Machinae in aequilibrio ſuſpenſum eſſet tenendum. Statim autem atque onus moueri, ipſaque Machina in agitatione verſari debet, quomodo motus comparatus ſit futurus ex ſolis principiis aequilibrii determina-

ri non poteſt : ſed manifeſto principia et leges motus in ſubſidium vocari debent, ſine quibus nihil certi in hoc negotio definire licet. Maxime autem principia aequilibrii et motus, etiamſi vulgo perperam inter ſe miſceri ſunt ſolita, a ſe inuicem diſcrepent, iam Magnus agnouit *Leibnizius*, dum illa neceſſario vera haec vero tantum contingentes vera eſſe pronunciauit. Cui effato tametſi grauiſſima argumenta aduerſantur, tamen certum eſt ingens inter haec duplicia principia diſcrimen intercedere, quod vel inde perſpicuum eſt, quod principia aequilibrii nunquam fere non fuerint cognita, neque de iis vnquam ſit diſceptatum, cum contra motus principia ante *Galilaeum* penitus ſint ignorata, eorumque diſtincta expoſitio demum *Neutono* ſummo potiſſimum accepta ſit referenda.

Cum igitur nulla Machina non ad motum ſit deſtinata, manifeſtum eſt eſſoetum ſine principiis motus accurate definiri non poſſe; horum autem principiorum applicatio ſine Analyſi ſublimiori inſtitui non poteſt. Doctrinam ergo vulgarem de Machinis, cuius imperfectio defectui principiorum motus atque Analyſis ſublimioris eſt tribuenda, Auctor in hac Diſſertatione perficere annititur; cuiusmodi perfectio cum fruſtra in Matheſi elementari quaeratur, quorum vulgo haec doctrina referri eſt ſolita, neceſſitas Matheſeos ſublimioris hinc maxime ſit perſpicua. Tantum ergo abeſt, vt haec ſcientia magis ſit ſubtilis quam vtilis, quod communiter obiici ſolet, vt ea potius in maxime popularibus inueſtigationibus nullo modo carere queamus. Exemplo, quod Auctor affert, hoc magis illuſtrabitur, caſum perpendit, quo onus 1000 librarum ope ponderis 100 librarum eleuari debet, ad quod quidem

dem axis in peritrochio ſit adhibendus: atque doctrina vulgaris docet, ſi radius maior ad minorem capiatur in ratione 10 ad 1 onus a pondere ſuſtentari in aequilibrio, nondum vero moueri poſſe: vnde quidem intelligimus ad motum producendum radium maiorem plus quam decies minorem ſuperare debere. Motus igitur ſequetur tardus quidem ſi ille radius vndecies longior capiatur, at celerior ſi vndecies vel duodecies: ſimul vero intelligitur, ſi nimis longus veluti centies vel millies longior ſtatuatur, pondus quidem multo celerius eſſe deſcenſurum, oneris autem aſcenſum iterum tardiorem eſſe futurum.

Quam velox autem quouis caſu motus oneris exiſtat, ex vulgaribus Mechanicae principiis minime definire licet, quae cognitio tamen ſi de Machinae effectu iudicare velimus, abſolute eſt neceſſaria: multo minus vide ea Machinae diſpoſitio, in qua ſumma perfectio continetur, quae oneri aſcenſum celerrimum inducit, definiri poteſt. Hanc igitur aliasque ſimiles quaeſtiones Mechanicas Auctor euoluit, atque Analyſi ſublimiori in ſubſidium vocata accurate enucleat.

DE MOTV TAVTOCHRONO PENDVLORVM COMPOSITORVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Pendula vulgaria, quibus motus horologiorum temperari ſolet, hoc vitio laborare, quod omnes oſcillationes, ſiue ſint ampliores, ſiue minores, non paribus temporis interuallis abſoluantur, iam pridem eſt notum. Duplex autem huius inaequalitatis ratio deprehenditur; altera in motu circulari eſt poſita, quae figura ad tautochroniſmum ſeu aequalem oſcillationum durationem minus

nus eſt accommodata, altera vero in reſiſtentia medii, in quo oſcillationes abſoluuntur. Hanc poſteriorem cauſam Auctor hic penitus ſeponendam arbitratur, cum quod perturbatio inde oriunda eſt minima, tum vero imprimis quod ipſe iam primus veram curuam, quae in fluido tautochronismum gignit, inuenit, et quomodo ad praxin ſit accommodanda oſtendit. In hac igitur diſſertatione motum penduli, quaſi in vacuo fieret, contemplatur, et quo pacto is tautochronus reddi queat, accuratius perpendit. Ac primo quidem conſtat, pendula ad duo genera, ſimplicia et compoſita, reuocari ſolere. Pendulum ſimplex vocatur id, cuius tota moles in vnico quaſi puncto eſt collecta, quale quidem nullum effici poteſt, proxime autem huiusmodi pendulum obtinetur, ſi corpus minimum et grauiſſimum de filo tenuiſſimo ſuſpendatur; cum enim moles fili pro nihilo reputari poſſit, corpusque alligatum ſit minimum, tota moles quaſi in puncto collecta ſine ſenſibili errore concipi poteſt. Tale pendulum oſcillationes omnes aequalibus temporibus abſoluere acutiſſimus *Hugenius* primus inuenit, ſi ita ſuſpendatur, vt corpus motum ſuum in cycloide conficiat; quem in finem filum intra duas ſimiles cycloides ſuſpendi oportere oſtendit; verum hic probe eſt notandum, iſtud remedium tantum ad pendula ſimplicia eſſe accommodatum. Pendula autem compoſita vocantur, quorum moles non in puncto collecta, ſed per aliquod volumen expanſa eſt, ad quod quidem genus omnia pendula realia ſunt referenda, cum maſſa mouenda ſemper per filum ſeu virgam, qua ſuſpenditur, et corpus ſeu lentem appenſam ſit diſtributa. Atque idem quidem *Hugenius*

regu-

regulam tradit, cuius ope pendulum quoduis compoſitum ad ſimplex reuocari, ſeu pendulum ſimplex inueniri poteſt, cuius motus conueniat cum motu compoſiti; quae reductio inuentione centri oſcillationis continetur: pendulum ſcilicet compoſitum perinde moueri demonſtrauit, ac ſi tota eius maſſa in centro oſcillationis eſſet collecta. His igitur duobus inuentis combinandis non difficile videtur pendulum quoduis compoſitum ad tautochronismum adaptare, ac nemo adhuc dubitaſſe videtur, quin iſta motus oſcillatorii aequabilitas obtineatur, ſi pendulum compoſitum ita ſuſpendatur, vt eius centrum oſcillationis ſecundum cycloidem incedat. Verum ſi perpendamus determinationem centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis pendere, atque in motu intra duas cycloides punctum ſuſpenſionis iugiter mutari, id ſcilicet punctum, circa quod pendulum quouis momento gyratur, facile agnoſcemus, in quouis ſitu penduli obliquo centrum oſcillationis mutari, neque idcirco per cycloidem tautochronismum obtineri poſſe. Cum igitur cyclois penduli tantum ſimplicis oſcillationes iſochronas reddat, in hac diſſertatio pro quouis pendulo compoſito curua ad tautochronismum apta inueſtigatur, quae pro diuerſa corporis oſcillantis figura plurimum variari poteſt. Etiamſi autem inueſtigatio huius curuae ad aequationem conſtructu difficillimam perducat. Auctor tamen eius conſtructionem ſatis feliciter ad quemuis caſum oblatum accommodat, et quicquid praeſtari poſſe videtur, expedit, non ſpernendis adhibitis calculi moleſtiſſimi artificiis.

His errata, a *Clar. Auctore* tranſmiſſa, addimus.

Pagin.	Linea	loco	lege
224	8	tam magnitudine quam longitudine	tam magnitudine quam poſitione
231	26	centrum C tranſire	centrum C circulum tranſire
232	6	altera vt quod	altera quod
235	12	atteruter	alteruter
237	23	poſito ſimitoto = 1	poſito ſinu toto = 1
238	3	ita vt ſit $y = \Phi + \theta$	ita vt ſit $\eta = \Phi + \theta$
239	penult:	$-2dz^d\Phi$ ſin. $\Phi - z^d\Phi^2$ coſ $\Phi - z^{dd}\Phi$ ſin. Φ	$-2dzd\Phi$ ſin $\Phi - zd\Phi^2$ coſ. $\Phi - zdd\Phi$ ſin Φ
	vlt:	$+2dz^d\Phi$ coſ. $\Phi - z^d\Phi^2$ ſin $\Phi + z^{dd}\Phi$ coſ Φ	$+2dzd\Phi$ coſ. $\Phi - zd\Phi^2$ ſin. $\Phi + zdd\Phi$ coſ Φ

NB Per totam hanc diſſertationem character differentiationis *d* crebro ſupra ſupra lineam inſtar exponentis exprimitur, quem errorem hic ſemel notaſſe ſufficiat.

Pagin.	Linea	loco	lege
241	13	diſtantiarum ſecarum	diſtantiarum ſuarum
	19	ſeu $dd\eta =$	ſeu $dd\eta =$
243	21	II. $2^d z^d + z^{dd}\Phi =$	II. $2dzd\Phi + zdd\Phi =$
	penult	vniformiter reuoluen-	vniformiter reuoluen-
245	12	I. $ddz = z^d\Phi^2$	I. $ddz - zd\Phi^2 =$
246	15	hanc indicet formam :	hanc induet formam :
248	20	negligantor	negligantur
	ib.	negligentes	inuoluentes
251	14	motus medium ad motum	motus medius ad motum

252

Pagina	Linea	loco	lege
252	18	*b* — 60,	*b* = 60,
256	27	quaecunque Machina	quacunque Machina
258	6	Cum autem pono,	Cum autem porro
	12	nullam vnquam viri	nullam vnquam vim
259	22	fore conſtitutum	fore conſtitutam
270	8	iam attingent	iam attigerit
280	6	$=15625\ tt \frac{p-q}{P+Q}$	$=15625\ tt \frac{p-q}{P+Q}$
282	3	tang. $\Phi = v$: vnde ſi $v = 3$	tang. $\Phi = \nu$: vnde ſi $\nu = 3$.

NB. In ſequentibus etiam ſaepius Latina littera v pro Graeco ν ponitur.

Pagina	Linea	loco	lege
286	23	*Huienius*	*Hugenius*
296	8	$=(dt^2 - dt^2 ſ$	$= C dt^2 - dt^2 ſ$
	11	ita autem id accepi ponamus	ita autem id accipi ponamus,
300	2	$\frac{dz\sqrt{(kk+r)}}{r} = \frac{dx\sqrt{ſ}}{\sqrt{2x}}$	$\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{ſ}}{\sqrt{2x}}$

PHYSICO - MATHEMATICA.

DE ARGENTO VIVO CALOREM CELERIVS RECIPIENTE ET CELERIVS PERDENDE QVAM MVLTA FLVIDA LEVIORA EXPERIMENTA ET COGITATIONES AVCTORE G. *W. RICHMANN.*

Quas Auctor anno 1750. conuentui exhibuit cogitationes, paucis recenſemus, et Corollaria, Phyſicam experimentalem amplificantia, ex obſeruationibus potiſſimum

mum exponemus. Auctor nouum in Phyſicis, vt axioma, tradit exemplum: Denſiora corpora difficilius caleſieri, et difficilius calorem adquiſitum perdere, quam rariora; hinc et argentum viuum difficilius caleſieri aqua et aliis fluidis, difficiliusque refrigerari. Verum enim vero cum hocce alii partim non abſque veri ſpecie tradiderunt, partim cautius rem attigerunt, tamen, quo modo ſolida diuerſa calorem inter ſe, et cum fluidis, communicent, examinauit, quia ei hac in re parum praeſtitum eſſe videbatur, experimentisque XXIII. probauit, ex quibus petet: a) Argentum viuum vel in medio aëre denſiori aqueo, vel in niue frigidiori, maiora, quam aqua, ſpiritus vini ordinarius, petroleum, oleum Terebinthinae, ſpiritus rectificatiſſimus et oleum lini, caloris pati decrementa. b) Idem in medio aqueo calidiori maiora, quam petroleum, oleum Terebinthinae et ſpiritus vini ordinarius, capere incrementa. c) Incrementa et decrementa caloris mercurii et petrolei; decrementa autem caloris olei Terebinthinae, petrolei et mercurii, fere in aëre eſſe aequalia. d) Aquae et ſpiritus vini ordinarii decrementa et incrementa caloris in aëre eſſe minora, decrementis et incrementis caloris argenti viui et petrolei; olei lini autem decrementa in aëre eſſe minora decrementis petrolei et mercurii. *Cel. Nolletius* quidem in *lectionum Phyſicarum tomo IV. anno* 1749. euulgato, idem aſſerit, experimentisque confirmat; lectores autem ex ratione experimentorum abunde cognituros, Auctorem ea, dum has concinnauit cogitationes, nondum legiſſe et vidiſſe. Quo autem diuerſitas Thermometrorum vaſorumque nullum iniiceret dubium, quamquam allata Corollaria ex

experi-

experimentis ſatis patent, tamen hoc experimento XXIV. alia ratione confirmare voluit. Poſito igitur, ſi diuerſitas accideret, obſeruat, hancce in fluidis, in calore recipiendo et perdendo, forte a magnitudine particularum homogenarum primae compoſitionis pendere, in corporibus autem heterogeniis rationem atque multitudinem pororum ad materiam aliter ſeſe habere. Vltimo experimentis XXV. vſque XXVII, mercurium maius, quam dicta fluida, decrementum caloris pati, confirmat.

DE RATIONE CALORVM ET RATIONE DENSITATIS RADIORVM DIRECTORVM AD DENSITATEM PER LENTEM REFRACTORVM DEFINIENDA COGITATIONES AVCTORE *G. W. RICHMANN.*

Dum ad hancce recenſendo progredimur diſſertationem, notamus, vtramque inquiſitionem ad perficiendam Philoſophiam naturalem aliquid conferre poſſe; hanc ob cauſam Auctor ponit, efficaciam radiorum ſolarium per vitra cauſtica augeri, et maiorem obſeruari in minori, minorem vero in maiori a foco vitri diſtantia. Et cum denſitates radiorum ſolarium vitrum cauſticum penetrantium, et in foco concurrentium, in diſtantiis a foco ſunt diuerſis; hinc patet: poſitis caloribus in ratione denſitatum radiorum, inuenire rationem calorum per Thermometra ordinaria, et diuerſis expanſionibus liquoris Thermometrici numeros, rationi praedictae congruentes, aſſignare. E contrario efficaciam quidem radiorum ſolarium, ſi per aërem his radiis antea calefactum tranſeat, poſt vitra cauſtica minui, obſeruationibus ab alio inſtitutis, confirmatam vidit, ei tamen in culpa eſſe tranſitus ignis

 in

in aërem calefactum largior, quam in alia corpora, non videbatur, ſed radii a vaporibus inter vitra cauſtica et ſolem haerentibus intercipi videbantur. Quo autem quilibet indicare poſſit, quantum obſeruationibus eiusmodi ſit tribuendum; hinc aliam iniit viam, ſi eiusmodi experimentis calorum veram definiret rationem, ita, vt experimenta repeteret, eaque alia inſtitueret ratione. Si ad obſeruationes attendit, patet, radios directos cum radiis refractis commode comparari non poſſe; ſi autem liceret comparare: a) Creſcente efficacia radiorum directorum, creſcere etiam deberet conſtanter efficacia radiorum refractorum, et contra. b) Eidem gradui a radiis directis producto ſemper idem gradus a refractis productus reſpondere deberet, et eidem gradui a radiis refractis producto idem gradus a radiis directis productus. Ex his apparet, quomodo de efficacia caloris in ſectione coni radiantis a lente producti indicandum ſit; et quomodo ratio denſitatis radiorum lente refractorum ad denſitatem radiorum directorum definiri debeat. Quo autem Auctor potioribus impedimentis obuiam iret, et diuerſas radiorum, in diuerſis ſpatiis collectorum, efficacias comparare valeret, obſeruat, non parum forte facere, ſi duas lentes, ſimiles et aequales, eligeret, et in diuerſis a foco diſtantiis in vtriusque coni radiantis axe Thermometri bulbum collocaret, qua ratione obtineretur: a) Tantum radiorum interceptum ab vna lente, quantum ab altera. b) Tot radios penetrare per vnam lentem, quot penetrant per alteram. c) Per idem tempus in vnius Thermometri bulbum efficaciam ſuam exercere radios ſolares, per quod exerant in alterius Thermometri bulbum. d) Denſitates radio-

radiorum eſſe ferme in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum Thermometrorum a focis, et in eadem ratione efficaciae radiorum refractorum. Tandem, vt conſtet, quomodo hae obſeruationes commode inſtitui poſſint, non nulla, adpendicis loco, addit momenta.

EMENDATIO LATERNAE MAGICAE AC MICROSCOPII SOLARIS AVCTORE *L. EVLERO.*

Non ſolum Auctor haec inſtrumenta dioptrica per ſe ſatis nota, ab inſignibus, quibus laborant, vitiis purgare conatur, ſed etiam nouam plane eorum conſtructionem docet; quae ſi ſucceſſu, vti ſperare licet, non careat, maximam vtilitatem allatura videatur.

Vitia autem, quibus haec inſtrumenta vulgari modo confecta laborant, ſequentia potiſſimum ab Auctore commemorantur. Primo ſcilicet per Laternam magicam et microſcopium ſolare non omnis generis obiecta repraeſentare licet, ſed tantum eiusmodi, quae maximam partem ſint diaphana: vnde figuras ope Laternae magicae exhibendas ſuper tabulas vitreas coloribus admodum dilutis depictas eſſe oportet, et Microſcopia ſolaria aliis obiectis repraeſentandis non inſeruiunt, niſi quae ita ſint tenuia, vt lumini liberum tranſitum permittant, ac pro diaphanis haberi poſſint. Ob hoc ergo vitium innumera corporum genera ab vſu horum inſtrumentorum excluduntur.

Secundum vitium in hoc conſiſtit, quod etiam huiusmodi corpora pellucida neutiquam ſatis diſtincte per memorata inſtrumenta exprimi queant. Cum enim obiecta in parte auerſa illuminentur, vnde partes eorum depingendae non niſi ob pelluciditatem lumen adipiſcuntur, radii libere tranſmiſſi ſimul in tabulam, ſuper qua pictura excipitur,

cipitur, incidentes imaginem non ſolum perturbant, ſed etiam dum tabulam colluſtrant, ipſam repraeſentationem non mediocriter debilitant: notum enim eſt in hoc negotio omne lumen peregrinum ſollicite a tabula arceri, neque vllius aliis radiis lucis acceſſum concedi debere, niſi qui ad imaginem exprimendam concurrant. Quin etiam iſti radii peregrini lucis, ob diuerſam, qua pollent, refrangibilitatem imaginem ſuper tabula iridis coloribus circumfundunt, quod incommodum in microſcopio ſolari imprimis cernitur.

Huic duplici incommodo Auctor ita occurrit, vt obiecta non per radios a tergo transmiſſos, ſed a parte antica incidentes colluſtrare ſuadeat; hoc enim modo etiam obiecta non diaphana adhiberi poterunt, neque vlla perturbatio a lumine alieno erit pertimeſcenda. Simili ſcilicet modo haec repraeſentatio perfici debet, quo in vulgaribus cameris obſcuris fieri ſolet; quibus, vti conſtat, obiecta quaeuis, dummodo ſufficienter fuerint illuminata, ſatis clare ac diſtincte exprimuntur. Ex quo intelligitur, ſi etiam ea obiecta, quorum imagines per Laternam magicam vel microſcopium ſolare exhibere velimus, a parte antica ſatis fuerint illuminata, repraeſentationem pari modo ſuccedere debere.

Totum ergo negotium eo redit, vt obiectis repraeſentandis ſatis fortis illuminatio inducatur, neque tamen a luce, quae ad hoc adhibetur, vllus radius directe in tabulam incidere poſſit: quod quidem non difficulter efficietur, ſi lux illa illuminans ad latera tubi, per quem fit repraeſentatio, conſtituatur, eique omnis aditus ad tabulam, quae imaginem recipit praecludatur. Tum vero

non

non difficile eſt eiusmodi mechaniſmum adiungere, quo obiecto ſiue a ſole, ſi a lumine plurium lampadum ope ſpeculorum lentiumue conuexarum illuminatio quantumuis magna induci queat.

Aſſumta porro pro cognita obiecti illuminatione Auctor per Theoriam inquirit in ſplendorem ſeu quantitatem luminis, quo ipſa imago per lentem refringentem exprimi debeat: huncque ſplendorem, cum non admodum fortis obtineri queat, cum lumine, quo ipſum obiectum a Luna plena colluſtraretur, comparat, ſicque lumen, quo imago quouis caſu ſit apparitura a priori definit. Ad omnes autem has repraeſentationes vnicalente conuexa vtitur, quoniam inuerſio imaginis nihil turbare eſt cenſenda, praeter quam quod ipſa obiecta ſitu inuerſo exponere licet.

Pro magnitudine autem obiectorum, quae repraeſentari debent, et ratione multiplicationis in imagine factae quatuor praecipua huiusmodi Machinarum genera conſtituit: quorum primum eſt accommodatum ad obiecta ſex pedum repraeſentanda, ſecundum ad obiecta vnius pedis, tertium duorum digitorum, et quartum duarum linearum, quorum vltimum ratione vſus vicem microſcopii ſolaris ſuſtinere poteſt, priora vero totidem laternas magicas conſuetis multo praeſtantiores referent. In quolibet denique genere Auctor tam magnitudinem quam aperturam lentis maxime idoneae ſollicite determinat, ſimulque ſplendorem imaginis, qui cuilibet multiplicationi conueniat, aſſignat rationem ſcilicet eius ad ſplendorem ipſius obiecti; ita vt nullum dubium ſupereſſe videatur, quin praeceptis Auctoris probe obſeruatis non contemnenda huius generis inſtrumenta tam ad vtilitatem quam delectationem parari queant.

His errata, a *Clar. Auctore* transmiſſa, mittimus.

Pagina	Linea	loco	lege
363	16	obiecta, repraeſentanda	obiecta repraeſentanda
364	7	- - - euerſa	- - - auerſa
365	12	confundantur	confunduntur
	penult.	accepit	accipit
368	4	omni lumen	omne lumen
	penult.	apparitua	apparitura
369	11	a lana plena	a Luna plena.
	14	imagines	imaginis
	16	huic	hinc
	19	$Be = n$, E A	$Be = n$. E A
	20	$Be = na \frac{af}{a-f}$	$Be = na = \frac{af}{a-f}$
371	5	fit cognitus	ſit cognitus
	20	*ſeg*	*ſeg*
372	13	imagines	imaginis
	23	$b = 1$ pollices	$b = 1$ pollici
	27	queri quies	quinquies
375	3	lampade	lampades
	5	famo	fumo

ANNOTATIONES CIRCA CONSTRVCTIONEM HOROLOGII MARINI AVCTORE *C. G. KRATZENSTEIN.*

De horologiorum conſtructione et motu multae nunc inſtituuntur diſquiſitiones, ac plena ſunt *Anglorum Acta Societatis* de hoc negotio. Nuper *Clar. Koeſfeldius* etiam horologium propoſuit autobarum, quod in nauigationibus ad obſeruationes Aſtronomicas inſtituendas, et longitudinem maris inde determinandam, commendat. Hoc itaque

itaque Auctori occaſio eſt data, meditationes ſuas de perficiendo horologio marino conſcribendi. Quum autem clepſydrae mercuriales, nautis alias commendatae, multis laborant imperfectionibus; hinc ſtudio eas recenſet, et firmis demonſtrat argumentis, horologium marinum eiusmodi imperfectionibus laborare non debere, ſi illud in ſuo genere, tanquam perfectum, iudicare velimus. Tandem requiſita talis horologii marini adducit, et concludit, adhibito praeſcripto ſtudio, et obſeruatis indicatis cautelis, tale horologium ſcopo nautarum omnino ſatisfacere poſſe.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1747, 1748 ET 1749. AVCTORE *G. W. KRAFFT.*

Exhibuit Auctor hac diſſertatione obſeruationes ſuas *Tubingae* inſtitutas. §. 1. Inſtrumenta, quibus vſus eſt, et reliquas obſeruationum circumſtantias, adducit. §. 2. Obſeruationis altitudinis Barometricae, maxumae et minimae differentiam adfert. §. 3. Obſeruationes tradit Thermometricas, ex quibus adparet, maxumum calorem fuiſſe 87 graduum ſecundum *Fahrenheitianum*. §. 4. 5. et 6. Non nullas auroras boreales, aut earumdem veſtigia ab eo obſeruatas, et partim a *M. Biſchoff* in vicino ibidem pago, *Steinebrunn* dicto, partim a *Clar. Volzio Stuttgardiae* notatas et communicatas, refert. § 7. Lumen zodiacale Caſſinianum annis 1748. et 1749. diſtincte annotat. §. 8. Declinationes acus Magneticae, ſex pollices longae, et §. 9. quasdam in Eclipſi lunae obſeruationes anno 1747. die 25. Febr. temp. matut., omni cura addit. §. 10. Inſtar adpendicis, tonitrua, grandines, primas hirundines et halones adducit.

PHYSICA.

OBSERVATIONES ANATOMICO-PRACTICAE COMMVNICATAE a *JOANNE FREDRICO SCHREIBER*

Auctor ſex obſeruationes exhibet, quarum contenta paucis retuliſſe, nobis ſatis erit, de cetero lectorem ad ipſam diſſertationem ablegantes. In *prima* adſentitur, ad vitandum, in Chirurgia capitis, ſuturas cum fractis, ſuturarum capitis, quot poſſunt, varietates notari debere. Hinc vnam valde raram deſcribit, et figura data illuſtrat. *Secunda* tradit ſingularia viſa in cadauere *G. F. Iuncker*, qui olim fuit huius *Academiae membrum honorarium*. *Tertia* delineat enormem fracturam, quae poſt obitum in cranio adoleſcentis, demum in oculos incurrit, nihilominus per 19 dies, ſine malis ſignis ſuperſtitis. *Quarta* ſiſtit valde ingens aneuriſma in pectore, ex cadauere viri. *Quinta* agit de corde villoſo nautae. *Vltima* refert de ſcroto iuuenis, in quo, praeter duos teſticulos, recte conſtitutos, fuit corpus tertium, illis, quoad externa, ſimillimum, quaſi tertius teſticulus, ſed vera hydatis. Auctor illam in medium produxit, ad dubiam reddendam exſiſtentiam triorchidum.

OBSERVATIONES GENERALES VNIVERSAM HISTORIAM PISCIVM CONCERNENTES AVCTORE *G. W. STELERO.*

Quamquam hae obſeruationes partim praemittendae erant Auctoris *Ichthyologiae Sibiricae et Camtſchaticae*, quae olim typis imprimetur, partim inſerendae *Deſcriptionibus* nominatorum hic *piſcium*, nihilominus tamen in *Commentariis* eas, tanquam praenuncias laborum Cl. Auctoris

Cl. Auctoris cum publico communicandas e re eſſe iudicatum eſt: praeſertim quod plura ſunt in iis et noua, et non vbiuis obuia, et ſcitu haud indigna, quae prima quaque occaſione non communicare cum erudito orbe religioni ducimus. Tractat autem hic Cl. Auctor de generatione piſcium, de aetate Truttacei generis, et quae aut obſeruata aut obſeruanda ſunt in examine piſcium; de vſu appendicum inteſtinalium, et de differentiis variorum piſcium. Ex quibus obſeruationibus facile iudicare poterit lector, quanto ſtudio *Stellerus* noſter in veritatem naturae inquiſiuit, et quanto damno hiſtoriae naturalis in ipſo aetatis flore mortuus eſt; niſi dicamus, diu vixiſſe, qui multa praeſtitit.

ASTRONOMICA.

SVMMARIVM OBSERVATIONIS ECLIPSEOS SOLARIS D. 8 IAN. 1750. ST. N. A *CLAR. KRAFFT* TVBINGAE HABITAE, E LITTERIS AD *WINSHEIMIVM* DATIS CVM ACADEMICIS COMMVNICATVM.

Haec obſeruatio ab Auctore in epiſtola, Germanico idiomate conſcripta, ad B. *Winsheimium* eſt data. Inſtrumenta, vt horologium portatile Anglicanum, tubus terreſtris Anglicanus 5 pedum, et quadrans vnius pedis, ad obſeruationem adhibita, ſunt mediocria, et quia notatu ſunt digna, ergo haec obſeruatio in lingua Latina, vti ſcriniis Academicis eſt inſerta, communicatur.

OBSERVATIO ECLIPSIS LVNAE TOTALIS D. 19 IVN. ST. N. 1750. LIPSIAE HABITA AVCTORE *G. HEINSIO.*

Haec obſeruatio ab Auctore coelo maxume ſereno vsque ad finem Eclipſis eſt peracta. Teleſcopio Gregoriano

goriano fuit inſtructus ſub eo apparatu, quo hoc obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus amplificabat. Macularum emerſiones optime obſeruauit, et terminum vmbrae probe diſtinguere potuit. Momenta appulſuum ad duo horologia comparata in obſeruatis recenſet.

OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM ANNO 1748 HABITARVM, CONTINVATIO AVCTORE G. *HEINSIO.*

Auctor cum Academicis varias obſeruationes communicare pergit: hinc primo Eclipſes ſatellitum Iouis exponit; deinde occultationes fixarum a luna tradit; tum obſeruationes de Cometa 1748 addit; poſt de apparitione Veneris non nulla refert; tandemque obſeruationes Meteorologicas an. 1748. inſtitutas, indicat.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE ECLIPSIVM SATELLITVM IOVIS DVRANTE KAMTZATKIENSI IN DIVERSIS SYBIRIAE LOCIS HABITAE A CENTVR. VICARIO *ANDREA KRASILNICOW.*

REFERENTE EX MANDATO ILLVSTRISSIMI ACADEMIAE PRAESIDIS ADIVNCTO *NIC. POPOW.*

Obſeruationes Auctoris non omnes ſunt exactae, quia interdum vnico vſus eſt horologio, et coelum per aliquod dies non fuit ſerenum. Eclipſes ſatellitum Iouis obſeruauit in *Ilginskoy* et *Kiringinskoy Oſtrog*, in pago *Witimsk* et *Oljokminskoy Oſtrog*, in vrbe *Iakuzk* et *Bolſcherezkoy Oſtrog*, in vrbe Portus *Petri* et *Pauli* dicta et portu *Ochozk*, in vrbe *Ieniſeysk* et *Tomsk*, vt et in caſtello *Iamyſchewsk.* Tandem vero differentias meridianorum a *Petroburgo* addit.

INDEX

INDEX
COMMENTARIORVM.

Mathematica.

L. Euleri, Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi vlterius promota. p. 3.
Eiusdem, De ſerierum determinatione, ſeu noua methodus inueniendi terminos generales ſerierum. p. 36.
Eiusdem, Conſideratio quarumdam ſerierum, quae ſingularibus proprietatibus ſunt praeditae. p. 86.
G. W. Krafft, De diuiſoribus numerorum indagandis. p. 109.
L. Euleri, De partitione numerorum. p. 125.
H. Kuhnii, Meditationes de quantitatibus imaginariis conſtruendis et radicibus imaginariis exhibendis. p. 170.
L. Euleri, Solutio problematis Geometrici. p. 224.
Eiusdem, De perturbatione motus Planetarum ab eorum figura non ſphaerica oriunda. p. 235.
Eiusdem, De machinis in genere. p. 254.
Eiusdem, De motu tautochrono pendulorum compoſitorum. p. 286.

Phyſico-Mathematica.

G. W. Richmanni, De argento viuo calorem celerius recipiente et celerius perdente, quam multa fluida leuiora, experimenta et cogitationes. p. 309.
Eiusdem, De ratione calorum et ratione denſitatis radiorum directorum ad denſitatem per lentem refractorum definienda cogitationes. p. 340.

L. Euleri,

L. Euleri, Emendatio laternae Magicae ac Microſcopii ſolaris. p. 363.

C. G. Kratzenſteinii, Annotationes circa conſtructionem horologii marini. p. 381.

G. W. Krafft, Obſeruationes Meteorologicae factae Tubingae, annis 1747. 1748. et 1749. p. 386.

Phyſica.

I. F. Schreiberi, Obſeruationes Anatomico - practicae communicatae. p. 395.

G. W. Stelleri, Obſeruationes generales vniuerſam hiſtoriam piſcium concernentes. p. 405.

Aſtronomica.

G. W. Krafft, Summarium obſeruationis Eclipſeos ſolaris d. 8. Ian. 1750. ſt. n. Tubingae habitae. p. 423.

G. Heinſii, Obſeruatio Eclipſis lunae totalis d. 19. Ian. ſt. n. 1750. Lipſiae habita. p. 424.

Eiusdem, Obſeruationum Lipſienſium anno 1748. habitarum continuatio. p. 427.

A. Kraſilnikow, Obſeruationes Aſtronomicae Eclipſium ſatellitum Iouis, durante expeditione Kamtzatkienſi in diuerſis Sibiriae locis habitae. p. 444.

MATHEMATICA.

METHODVS AEQVATIONES DIFFERENTIALES ALTIORVM GRADVVM INTEGRANDI VLTERIVS PROMOTA

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Tradidi in volumine ſeptimo Miſcellaneorum Berolinenſium methodum facilem aequationes differentiales cuiusque gradus, in quibus altera variabilis vbique vnicam obtinet dimenſionem, alterius vero tantum differentiale, quod conſtans aſſumitur, occurrit, integrandi, atque adeo aequationem finitam, quae differentialem propoſitam penitus exhauriat, inueniendi. Neque enim, ſi aequatio propoſita differentialis primum gradum ſuperet, pluribus repetitis integrationibus opus erat, ſed vno quaſi ictu cuiuscunque demum fuerit gradus aequatio propoſita, methodus ibi expoſita eandem ſuppeditat aequationem finitam, quae proditura eſſet, ſi ſucceſſiue tot inſtituerentur integrationes, quot gradus differentialia in ea obtinent. Sic ſi aequatio propoſita ſit differentialis quarti gradus, more ſolito ea per vnam integrationem primo ad aequationem differentialem tertii gradus reduci, tum vero denuo integratio ſuſcipi deberet, vt ad gradum ſecundum reuocetur; quo facto adhuc duae ſupereſſent inte-

 tegra-

tegrationes inſtituendae, antequam ad aequationem quantitatibus finitis expreſſam perueniretur. Hanc igitur operationum plerumque difficillimarum multiplicitatem per methodum meam prorſus euito, dum vnica operatione ſtatim veram aequationem integralem elicio.

§. 2. Quantopere autem modum integrandi vulgarem toties repetendum, quoties differentialitas in aequatione ineſt, ſecuti in moleſtiſſimos calculos incidamus, vnico exemplo oſtendiſſe iuuabit. Sit ergo propoſita haec aequatio differentialis tertii gradus $d^3y = ydx^3$, in qua elementum dx conſtans ponitur. Haec aequatio, etſi mea methodo facillime ter integratur, tamen ne quidem modus eam ſemel tantum integrandi perſpicitur. Statim quidem, qui variabilis x ipſa deeſt, apparet eam ad gradum ſecundum deprimi poſſe. Si enim ponatur $dx = pdy$, ob dx conſtans erit $o = pddy + dpdy$ et denuo differentiando $o = pd^3y + 2dpddy + dyddp$. vnde fit $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ et $d^3y = -\frac{2dpddy}{p} - \frac{dyddp}{p} = \frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p}$, qui valores in aequatione propoſita $d^3y = ydx^3$ ſubſtituti dabunt:

$$\frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p} = yp^3dy^3 \text{ ſeu } yp^5dy^2 = 2dp^2 - pddp.$$

Quae cum neque dp neque dy ſit conſtans, ſed conſtantiae ratio ex aequatione $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ definiatur, per methodos ſolitas vix vlterius tractari poteſt. Transmutari quidem aequatio poteſt in aliam formam, in qua nullum differentiale conſtans inſit. Ponatur $dp = qdy$; erit $ddp = qddy + dqdy$ at $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ dabit $ddy = -\frac{qdy^2}{p}$, vnde $ddp = -\frac{qqdy^2}{p} + dqdy$

ſicque

ſicque aequatio inuenta hanc induet formam:

$$yp^5dy = 2qqdy + qqdy - pdq = 3qqdy - pdq.$$

In qua pro lubitu differentiale conſtans aſſumere licet. Sit dy conſtans, ob $q = \frac{dp}{dy}$ erit $dq = \frac{ddp}{dy}$; habebiturque

$$yp^5dy^2 = 3dp^2 - pddp.$$

At ſi ponatur $p = \frac{1}{r}$ fiet $ydy^2 = rdr^2 + rrddr$ quae aequatio cum ambae variabiles vbique totidem ſcilicet tres dimenſiones teneant, ope methodi meae in III. Tomo Comment. explicatae tractari poteſt. Ponatur ſcilicet $y = e^{\int zdu}$ et $r = e^{\int zdu}u$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit $dy = e^{\int zdu}zdu$ et $ddy = 0 = e^{\int zdu}(zddu + dudz + zzdu^2)$. Deinde eſt $dr = e^{\int zdu}(du + zudu)$ et ob $r = uy$ erit $ddr = 2dudy + yddu = e^{\int zdu}(ddu + 2zdu^2)$. Sed $ddu = -\frac{dudz}{z} - zdu^2$ vnde $ddr = e^{\int zdu}(zdu^2 - \frac{dudz}{z})$. Qui valores in aequatione $ydy^2 = rdr^2 + rrddr$ ſubſtituti dabunt:

$$zzdu = u(1 + zu)^2du + uuzdu - \frac{uudz}{z}$$

quae aequatio etſi eſt differentialis primi gradus, tamen multo difficilius tractatur, quam ipſa aequatio propoſita ſimplicior quidem aliquantum reddi poteſt ponendo $z = tu$, fiet enim. $\frac{dt}{t} = ttu^3du + 3tudu - ttdu$

Quin potius cum aequatio propoſita ipſa facile conficiatur, inde integratio huius aequationis petenda videtur. Ponatur porro $t = \frac{1}{s}$, atque aequatio inuenta abibit in hanc

$$sds + 3sudu = du(1 - u^3)$$

quae aequatio immediate ex propoſita elicitur, ponendo $dx = \frac{du}{s}$ et $\frac{dy}{y} = \frac{udu}{s}$, fiet enim ob $\frac{du}{s}$ conſtans, $sddu$

 $= dsdu$

$= ds\,du$ et $\frac{ddy}{y} = \frac{u^2du^2}{ss} + \frac{du^2}{s}$ et $\frac{d^3y}{y} = \frac{u^3du^3}{s^3} +$ $\frac{3udu^3}{ss} + \frac{du\,ddu}{s} = \frac{u^3du^3}{s^3} + \frac{3udu^3}{ss} + \frac{du^2ds}{ss}$, qui valores in aequatione $d^3y = y\,dx^3$ ſubſtituti praebebunt aequationem inuentam.

$$s\,ds + 3\,su\,du = du(1 - u^3).$$

§. 3. Totum ergo negotium ad integrationem huius aequationis reuocatur; quam integrabilem eſſe vel inde patet, quod aequatio differentialis tertii gradus, ex qua eſt nata, integrationem admittat. Quemadmodum autem hoc opus ſit abſoluendum in aequatione latius patente, quae per eandem ſubſtitutionem ex hac aequatione differentiali tertii gradus oritur,

$$A\,y\,dx^3 + B\,dx^2dy + C\,dx\,ddy + D\,d^3y = 0.$$

Prodibit autem ponendo $dx = \frac{du}{s}$ et $\frac{dy}{y} = \frac{u\,du}{s}$ haec aequatio differentialis primi gradus.

$$Ds\,ds + s\,du(C + 3Du) + du(A + Bu + Cuu + Du^3) = 0$$

quam primum obſeruo huiusmodi valorem pro $s = \alpha + \beta u + \gamma uu$ admittere. Erit enim $ds = \beta du + 2\gamma u\,du$. Vnde fit

$$\begin{aligned}
\frac{Ds\,ds}{du} &= D\alpha\beta + 2D\alpha\gamma u + 2D\beta\gamma u^2 + 2D\gamma^2u^3 \\
&\quad + D\beta\beta u \quad + D\beta\gamma u^2 \\
s(C + 3Du) &= C\alpha + C\beta u \quad + C\gamma uu \\
&\quad + 3D\alpha u \quad + 3D\beta u^2 \quad + 3D\gamma u^3 \\
A + Bu + Cu^2 + Du^3 &= A + Bu \quad + Cu^2 \quad + Du^3.
\end{aligned}$$

Reddantur iam ſinguli termini homologi $= 0$, fietque primo $1 + 3\gamma + 2\gamma\gamma = 0$. Vnde fit vel $1 + \gamma = 0$ vel $1 + 2\gamma = 0$. Deinde eſt $3D\beta(\gamma + 1) + C(\gamma + 1) = 0$, cui aequationi quoque ſatisfacit $\gamma + 1 = 0$, ergo erit $\gamma = -1$.

Porro

Porro fiet $D\alpha = -B - C\beta - D\beta\beta$. Seu $\alpha = \frac{-B - C\beta - D\beta\beta}{D}$
Subſtituatur hic valor in aequatione $D\alpha\beta + C\alpha + A = 0$, ſeu
$D^2\alpha\beta + CD\alpha + AD = 0$ eritque

$$\begin{aligned} &-BD\beta - CD\beta^2 - DD\beta^3 = 0 \\ &-BC - CC\beta - CD\beta^2 \\ &+AD \end{aligned}$$

Ad β ergo inueniendum hanc aequationem cubicam reſolvere oportet. Sin autem α quaeratur erit

$$D^2\alpha^3 + BD\alpha^2 + AC\alpha + A^2 = 0$$

Sit $\alpha = \frac{A\omega}{D}$, fiet $A\omega^3 + B\omega^2 + C\omega + D = 0$
Sit ergo ω radix huius aequationis cubicae, fiet

$$\alpha = \frac{A\omega}{D};\ \beta = -\frac{D - C\omega}{D\omega} \text{ et } \gamma = -1$$

atque $s = \frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega}$ Porro fiet
$x = \int \frac{du}{s} = \int \frac{D\omega\, du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}$ atque
$ly = \int \frac{u\, du}{s} \int \frac{D\omega u\, du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}$.

Quamuis autem laborem has formulas integrandi ſuſciperemus, tamen integrale tantum particulare obtineremus, neque adeo totum negotium etiam nunc eſſet confectum. Non enim valor ipſius s hic inuentus aequationem exhaurit, quia in eo nulla noua occurrit conſtans, quae in ipſa aequatione non inſit. At vero cognito valore particulari ipſius s, ex eo valor completus ſequenti modo eruetur. Ponatur valor iam inuentus $\frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega} = V$ ac ponatur $s = V + z$; vt ſit $ds = dV + dz$, atque prodibit

$$\left.\begin{aligned} &DVdV + DVdz + DzdV + Dzdz \\ &+ CVdu \qquad\qquad + Czdu \\ &+ 3DVudu \qquad\quad + 3Duzdu \\ &+ (A + Bu \qquad\quad + Cuu + Du^3)du \end{aligned}\right\} = 0.$$

Cum

Cum vero ſit per hypotheſin:

$DV\,dV + V\,du(C + 3Du) + du(A + Bu + Cu^2 + Du^3) = 0$

erit $Dz\,dz + z(C\,du + 3Du\,du + D\,dV) + DV\,dz = 0$

At ob $V = \frac{A\omega}{D} - \frac{u}{\omega} - \frac{Cu}{D} - uu$ erit $dV = -\frac{du}{\omega} - \frac{C\,du}{D}$
$- 2u\,du$ atque $Dz\,dz + z(\frac{-D\,du}{\omega} + Du\,du) + \frac{dz}{\omega}(A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2) = 0$ ſeu $z\,dz + z\,du(u - \frac{1}{\omega}) + dz(\frac{A\omega}{D} - \frac{(D + C\omega)u}{D\omega} - uu) = 0$ quae aequatio niſi bene tractetur, difficulter ad ſeparationem variabilium perducitur. Interim tamen continetur in hac forma generali, quae ſeparationem admittit:

$$z\,dz + z\,du(u + a) = dz(uu + 2bu + c).$$

Ad quam ſeparandam pono $dz = p\,du$ fietque

$$z = \frac{(uu + 2bu + c)p}{p + u + a} \text{ et differentiando:}$$

$$dz = p\,du = \frac{(u + a)(uu + 2bu + c)dp + p\,du(-p(u + a) + uu + 2au + 2ab - c)}{(p + u + a)^2}$$

ſeu $p\,du(pp + 2ap - 2bp + aa - 2ab + c) = (u + a)(uu + 2bu + c)dp$ in qua variabiles ſponte a ſe inuicem ſeparantur: erit enim:

$$\frac{dp}{p(pp + 2(a - b)p + aa - 2ab + c)} = \frac{du}{(u + a)(uu + 2bu + c)}$$

Opus autem foret ſumme taedioſum, ſi hanc aequationem integrare, atque exinde integrale aequationis differentialis tertii gradus eruere vellemus.

§. 4. Apparet hinc quanto labore tandem huiusmodi regulas ſequendo integrale aequationis differentialis tertii gradus erui poſſit, vnde vtilitas methodi meae in Vol. VII. Miſc: expoſitae non mediocriter perſpicitur. Eo magis autem eius vtilitas in oculos incurret, ſi loco aequationis differentialis tertii gradus alia, quae ſit quarti altiorisue gradus more vſitato tractetur, tum enim ſubſtitutiones

nes

nes hic adhibitae aequationem differentialem non primi, ſed ſecundi altioriſue gradus praebebit, cuius integrale vix vllis artificiis obtineri poterit. Et quamuis tandem etiam huius aequationis integrale inueniretur, tamen id plerumque tantum foret particulare, et poſt moleſtiſſimas demum ſubſtitutione ſuppeditat, et ipſius aequationis propoſitae integrale, et quidem particulare tantum: cum mea methodus fere ſine vllo labore ſtatim integrale completum praebeat. Quod vt clarius intelligatur vtamur ante tradita ſubſtitutione in hac aequatione differentiali quarti gradus:

$$Aydx^4 + Bdx^3dy + Cdx^2ddy + Ddxd^3y + Ed^4y = 0.$$

in qua dx ponitur conſtans. Sit igitur $dx = \frac{du}{s}$ ſeu $du = sdx$, et $\frac{dy}{y} = \frac{udu}{s} = udx$; erit ob dx conſtans: $\frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2} = dx\,du = sdx^2$; ideoque $\frac{ddy}{y} = u^2dx^2 + sdx^2$. Hinc fiet porro $\frac{d^3y}{y} - \frac{dy\,ddy}{y^2} = 2usdx^3 + dsdx^2$ et $\frac{d^3y}{y} = u^3dx^3 + 3usdx^3 + dsdx^2$: iterumque differentiando prodibit $\frac{d^4y}{y} - \frac{dyd^3y}{yy} = 3uusdx^4 + 3udx^3ds + 3ssdx^4 + dx^2dds$, ideoque $\frac{d^4y}{y} = u^4dx^4 + 6uusdx^4 + 4udx^3ds + 3ssdx^4 + dx^2dds$. Quibus valoribus in aequatione hac ſubſtitutis.

$$Adx^2 + \frac{Bdxdy}{y} + \frac{Cddy}{y} + \frac{Dd^3y}{ydx} + \frac{Ed^4y}{yax^2} = 0$$

proueniet haec aequatio:

$$Adx^2 + Budx^2 + Cu^2dx^2 + Csdx^2 + Du^3dx^2 + 3Dusdx^2 + Ddxds$$
$$+ Eu^4dx^2 + 6Euusdx^2 + 4Eudxds + 3Essdx^2 + Edds = 0$$

Cum autem ſit $dx = \frac{du}{s}$ erit

$$du^2(A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4) + sdu^2(C + 3Du + 6Euu)$$
$$+ 3Essdu^2 + sduds(D + 4Eu) + Essdds = 0$$

 Appa-

Apparet quidem huic aequationi ſatisfieri, ſi ſit $s=0$ et u radix huius aequationis:

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0.$$

Sit ergo α vna ex radicibus huius aequationis, et ſumendo $u=\alpha$, erit $\frac{dy}{y}=\alpha dx$ et $y=e^{\alpha x}$, qui valor quoque aequationi differentiali quarti gradus propoſitae conueniet. Erit autem tantum integrale maxime particulare; etiamſi autem quaternae aequationis $A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0$ radices, quae ſint α, β, γ, δ, ſuppeditaro queant valorem

$$y=\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}$$

qui eſt integrale completum, tamen hinc non facile patet, qualis futurus ſit valor ipſius y, ſi radicum α, β, γ, δ quaedam fuerint imaginariae vel inter ſe aequales. Contra vero potius ex valore ipſius y cognito integrale ſuperioris aequationis differentio differentialis inter u et s aſſignabitur. Erit enim $u=\frac{dy}{ydx}$ et $s=\frac{du}{dx}$; ideoque

$$u=\frac{\mathfrak{A}\alpha e^{\alpha x}+\mathfrak{B}\beta e^{\beta x}+\mathfrak{C}\gamma e^{\gamma x}+\mathfrak{D}\delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}} \text{ et}$$

$$s=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha-\beta)^2e^{(\alpha+\beta)x}+\mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha-\gamma)^2e^{(\alpha+\gamma)x}+\mathfrak{A}\mathfrak{D}(\alpha-\delta)^2e^{(\alpha+\delta)x}+\mathfrak{B}\mathfrak{C}(\beta-\gamma)^2e^{(\beta+\gamma)x}+\text{etc.}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x})^2}$$

Hinc concluditur fore:

$$s+uu=\frac{\begin{array}{l}+\mathfrak{A}^2\alpha^2e^{2\alpha x}+\mathfrak{B}^2\beta^2e^{2\beta x}+\mathfrak{C}^2\gamma^2e^{2\gamma x}+\mathfrak{D}^2\delta^2e^{2\delta x}\\+\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2+\beta^2)e^{(\alpha+\beta)x}+\mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha^2+\gamma^2)e^{(\alpha+\gamma)x}+\text{etc.}\end{array}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x})^2}$$

quae fractio deprimi poteſt, eritque

$$s + uu = \frac{\mathfrak{A}\alpha^2 e^{\alpha x} + \mathfrak{B}\beta^2 e^{\beta x} + \mathfrak{C}\gamma^2 e^{\gamma x} + \mathfrak{D}\delta^2 e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

Cum iam ſit

$$u = \frac{\mathfrak{A}\alpha e^{\alpha x} + \mathfrak{B}\beta e^{\beta x} + \mathfrak{C}\gamma e^{\gamma x} + \mathfrak{D}\delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

ſi hinc x, quod autem actu fieri nequit, eliminetur, prodibit aequatio inter s et u. Si quidem ponatur $\mathfrak{C} = 0$ et $\mathfrak{D} = 0$, prodibit aequatio integralis particularis haec

$$s + uu - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta = 0.$$

Quare ſi fuerint α et β duae radices huius aequationis

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 = 0.$$

aequationi differentio differentiali inter s et u ſatisfaciet hic valor $s = -\alpha\beta + (\alpha + \beta)u - uu$. In aequatione autem illa non du ſed $\frac{du}{s}$ poſitum eſt conſtans, quae conſideratio exuetur ponendo $ds = q\,du$: erit enim $\frac{ds}{qs}$ conſtans ideoque $qs\,dds = q\,ds^2 + s\,ds\,dq$, et $dds = \frac{ds^2}{s} + \frac{ds\,dq}{q}$, ſtatuatur iam du conſtans, erit $dq = \frac{dds}{du}$ et $\frac{dq}{q} = \frac{dds}{ds}$, vnde fit $dds = \frac{ds^2}{s} + dds$. Prodibit ergo haec aequatio:

$$du^2(A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4) + s\,du^2(C + 3Du + 6Eu^2)$$
$$+ 3Ess\,du^2 + s\,du\,ds(D + 4Eu) + Es\,ds^2 + Ess\,dds = 0$$

in qua differentiale du aſſumtum eſt conſtans. Quodſi iam formulae $A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4$ factor trinomialis ſit $L + Mu + Nu^2$ erit integrale particulare

$$L + Mu + Nu^2 + Ns = 0.$$

§. 5. Quoniam autem hic methodum meam integrandi aequationes differentiales altiorum graduum vlterius

 exten-

extendere conſtitui, regulam quam loco citato dedi paucis repetam. Patet vero methodus mea ad omnes aequationes in hac forma generali contentas:

$$0 = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{E\,d^3y}{dx^3} + \frac{F\,d^4y}{dx^4} + \frac{G\,d^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

Vbi differentiale dx poſitum eſt conſtans. Ad huius aequationis integrale finitis terminis expreſſum inueniendum ex ea formetur ſequens forma Algebraica:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores reales tam ſimplices quam trinomiales, inter quos, ſi qui fuerint inter ſe aequales, coniunctim repraeſententur. Ex quolibet autem factore naſcetur integralis pars, et, ſi omnes iſtae partes ex ſingulis factoribus oriundae in vnam ſummam coniiciantur, habebitur integrale completum aequationis propoſitae. Ex ſequenti autem tabella partes integralis ex ſingulis factoribus oriundae deſumentur.

Factores	Partes Integralis
$z-k$	αe^{kx}
$(z-k)^2$	$(\alpha+\beta x)e^{kx}$
$(z-k)^3$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)e^{kx}$
$(z-k)^4$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)e^{kx}$
etc.	etc.
$zz-2kz\,\text{coſ.}\,\Phi+kk$	$\alpha e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{ſin.}\,kz\,\text{ſin.}\,\Phi+\mathfrak{A}e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi$
$(zz-2kz\,\text{coſ.}\,\Phi+kk)^2$	$(\alpha+\beta x)e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi$
$(zz-2kz\,\text{coſ.}\,\Phi+kk)^3$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2)e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi$
$(zz-2kx\,\text{coſ.}\,\Phi+kk)^4$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3)e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi$
etc.	etc.

In

In his formulis litterae α, β, γ, δ, etc. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. denotant conſtantes quantitates arbitrarias. Hinc in partibus integralis colligendis cauendum eſt, ne eadem harum litterarum bis ſcribatur, quia alioquin extenſio integralis reſtringeretur. Oportebit ergo has conſtantes continuo nouis litteris indicari, hocque modo in aequationem integralem tot ingredientur conſtantes arbitrariae, quoti gradus fuerit aequatio differentialis propoſita: id quod certum eſt indicium integrale hoc modo inuentum eſſe completum, atque in aequatione differentiali nihil contineri, quod non ſimul in hac aequatione integrali contineatur. Ceterum in eo loco, vbi hanc methodum fuſius expoſui, pluribus eam exemplis illuſtraui, ita vt circa eius applicationem nulla difficultas locum habere queat.

§. 6. Aequatio autem generalior, cuius integrationem hic ſum traditurus, denotante X functionem quamcunque ipſius x ita ſe habet:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

in qua iterum differentiale dx conſtans eſt aſſumtum. Hanc igitur aequationem quotumque conſtet terminis, ſeu ad quemcunque ea differentialium gradum aſcendat, ſemper per quantitates finitas integrari poſſe affirmo, perinde atque aequationem ante memoratam, quae tanquam caſus ex hac naſcitur, ſi fuerit functio $X = 0$. Ac primo quidem patet, rem nulli difficultati fore ſubiectam, ſi X fuerit functio rationalis integra ipſius x, ſeu ſi habeat huiusmodi formam:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

 Quodſi

Quodſi enim functio X ita ſit comparata, adhibeatur huiusmodi ſubſtitutio:

$$y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.} + v \text{ eritque}$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + \mathfrak{D}x^2 + \text{etc.} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D}x + \text{etc.} + \frac{ddv}{dx^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6\mathfrak{D} + \text{etc.} + \frac{d^3v}{dx^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \text{etc.} + \frac{d^4v}{dx^4}$$

etc.

Ponamus autem eſſe $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, atque in valore ipſius y omnes termini poſt $\mathfrak{D}x^3$ euaneſcentes erunt ponendi. Facta ergo ſubſtitutione habebitur:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 =$$

$$\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}Ax + \mathfrak{C}Ax^2 + \mathfrak{D}Ax^3 = Av + \frac{Bdv}{dx} + \frac{Cddv}{dx^2} + \frac{Dd^3v}{dx^3} + \frac{Ed^4v}{dx^4} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{B}B + 2\mathfrak{C}Bx + 3\mathfrak{D}Bx^2$$

$$2\mathfrak{C}C + 6\mathfrak{D}Cx$$

$$6\mathfrak{D}D$$

Hic iam coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ita definiri poterunt, vt omnes termini, in quibus non ineſt v eiusue differentialia, euaneſcant, fiet enim:

$$\mathfrak{D} = \frac{\delta}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\gamma}{A} - \frac{3\mathfrak{D}B}{A} = \frac{\gamma}{A} - \frac{3\delta B}{AA}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\beta}{A} - \frac{2\mathfrak{C}B}{A} - \frac{6\mathfrak{D}C}{A} = \frac{\beta}{A} - \frac{2\gamma B}{A^2} + \frac{6\delta B^2}{A^3} - \frac{6\delta C}{AA}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\mathfrak{B}B}{A} - \frac{2\mathfrak{C}C}{A} - \frac{6\mathfrak{D}D}{A} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta B}{A^2} + \frac{2\gamma B^2}{A^3} + \frac{6\delta BD}{A^3} - \frac{6\delta B^3}{A^4}$$

$$-\frac{2\gamma C}{A^2} - \frac{6\delta D}{A^2}$$

His ergo valoribus pro $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ aſſumtis erit

0 =

$$0 = Av + \frac{B\,dv}{dx} + \frac{C\,ddv}{dx^2} + \frac{D\,d^3v}{dx^3} + \frac{E\,d^4v}{dx^4} + \text{etc.}$$

quae aequatio ope ſuperioris methodi integrabitur.

§. 7. Quo autem facilius aequationis propoſitae, qualiſcunque X fuerit functio ipſius x integrale eruamus, a caſibus ſimplicioribus inchoemus, ac primo quidem ſit aequatio tantum differentialis primi gradus,

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx}.$$

quam patet integrabilem reddi poſſe, ſi multiplicetur per huiusmodi formam $e^{\alpha x}dx$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$. Fiet enim

$$e^{\alpha x}X\,dx = Ae^{\alpha x}y\,dx + Be^{\alpha x}dy.$$

Atque α ita comparatum eſſe oportet, vt pars poſterior ſit differentiale cuiuspiam quantitatis finitae: quae ex termino vltimo alia eſſe nequit niſi $Be^{\alpha x}y$, cuius differentiale cum ſit $= Be^{\alpha x}dy + \alpha Be^{\alpha x}y\,dx$ neceſſe eſt vt ſit $A = \alpha B$ et $\alpha = \frac{A}{B}$. Hoc ergo valore pro α ſumto erit

$$\int e^{\alpha x}X\,dx = Be^{\alpha x}y \text{ et } y = \frac{\alpha}{A}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

§. 8. Sit aequatio propoſita differentialis ſecundi gradus:

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2}.$$

Multiplicetur ea per $e^{\alpha x}dx$ ac definiatur α ita, vt integratio ſuccedat. Habebitur ergo

$$e^{\alpha x}X\,dx = Ae^{\alpha x}y\,dx + Be^{\alpha x}dy + \frac{Ce^{\alpha x}ddy}{dx},$$

cuius integrale ſit:

$$\int e^{\alpha x}X\,dx = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$$

Quo

Quo differentiato habebitur:

$$e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x}(\alpha A' y dx + A' dy + \frac{B' ddy}{dx}) + \alpha B' dy$$

Comparatione ergo facta fiet $B' = C$: $A' = B - \alpha C$ et $A = \alpha B - \alpha^2 C$, debet ergo eſſe α radix huius aequationis $0 = A - \alpha B + \alpha^2 C$, quae cum habeat duas radices vtramlibet aſſumere licet; eritque $A' = B - \alpha C$ et $B' = C$. Peruentum eſt ergo ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx = A' y + \frac{B' dy}{dx}.$$

Ad quam denuo integrandam multiplicetur per $e^{\beta x} dx$ vt habeatur.

$$e^{(\beta - \alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = A' e^{\beta x} y dx + B' e^{\beta x} dy$$

quae vt ſit integrabilis, debet eſſe $\beta = \frac{A'}{B'} = \frac{B - \alpha C}{C}$ ſeu $\alpha + \beta = \frac{B}{C}$, vnde patet β eſſe alteram radicem aequationis $0 = A - \alpha B + \alpha^2 C$, eritque integrale:

$$\int e^{(\beta - \alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = B' e^{\beta x} y = C e^{\beta x} y.$$

Eſt vero $\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta - \alpha}\int e^{\alpha x} X dx - \frac{1}{\beta - \alpha}\int e^{\beta x} X dx$

Ergo $Cy = \frac{e^{-\alpha x}}{\beta - \alpha}\int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha - \beta}\int e^{\beta x} X dx.$

In hac aequatione integrali ambae radices α et β aequationis quadraticae $0 = A - Bz + Czz$ aequaliter inſunt, et hanc ob rem ſi iſtius aequationis radices ſint cognitae ex iis ſtatim aequatio integralis formatur. Iſta autem aequatio $0 = A - Bz + Czz$ ex ipſa aequatione propoſita

$$X = Ay + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2}$$

facilli-

facillime formatur: ſimili ſcilicet modo, quo in caſu $X = 0$ ſumus vſi. Ponatur enim 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; et z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$, vt prodeat iſta expreſſio $A + Bz + Czz$; cuius factores ſi fuerint $C(z+\alpha)(z+\beta)$; erunt α et β eae ipſae litterae, quae ad aequationem integralem formandam requiruntur.

§. 9. His praemiſſis aditus ad integrationem aequationis integralis non adeo erit difficilis. Sit ergo propoſita haec aequatio:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

cuius vltimus terminus ſit $\frac{\Delta d^n y}{dx^n}$. Formetur hinc iſta expreſſio modo ante indicato:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + \Delta z^n = P.$$

quae in factores ſimplices reſoluta ſit:

$$P = D(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta) \text{ etc.}$$

Dico iam ſi aequatio differentialis propoſita per $e^{\alpha x}dx$ multiplicetur eam euadere integrabilem. Erit enim

$$e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}dx\left(Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n}\right)$$

cuius integrale ponamus eſſe:

$$\int e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^{n-1}y}{dx^n}\right)$$

Sumto autem differentiali habebitur

$$e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}dx\left(\alpha A'y + \frac{A'dy}{dx} + \frac{B'ddy}{dx^2} + \frac{C'd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dy^n}\right)$$
$$+ \frac{\alpha B'dy}{dx} + \frac{\alpha C'ddy}{dx^2}$$

quae ſi cum propoſita conferatur erit:

$$A' = \frac{A}{\alpha};$$
$$B' = \frac{B}{\alpha} - \frac{A}{\alpha^2}$$
$$C' = \frac{C}{\alpha} - \frac{B}{\alpha^2} + \frac{A}{\alpha^3}$$
$$D' = \frac{D}{\alpha} - \frac{C}{\alpha^2} + \frac{B}{\alpha^3} - \frac{A}{\alpha^4}$$

quibus valoribus vsque ad vltimum continuatis, peruenietur ad hanc aequationem:

$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + E\alpha^4 - \ldots\ldots \pm \Delta\alpha^n = 0$$

cum igitur α ſit radix huius aequationis erit $z + \alpha$ factor iſtius expreſſionis

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + \Delta z^n.$$

exiſtente $P = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)$ etc.

§. 10. Prima ergo integratione abſoluta erit

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx = A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} + \ldots \frac{\Delta d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

Formetur hinc iterum modo ante expoſito haec expreſſio:

$$P' = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \ldots\ldots + \Delta z^{n-1}$$

Cum iam ſit:

$$A = \alpha A'$$
$$B = \alpha B' + A'$$
$$C = \alpha C' + B'$$
$$D = \alpha D' + C'$$
etc.

manifeſtum eſt fore $P = (\alpha + z)P'$, ideoque $P' = \frac{P}{z+\alpha}$ et

et $P' = \Delta(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)(z+\varepsilon)$ etc.
Simili ergo modo, quo ſupra vſi ſumus, euincetur hanc aequatione denuo reddi integrabilem, ſi multiplicetur per $e^{\beta x}\, dx$.
Sit igitur aequatio integralis hinc oriunda.

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = e^{\beta x}\left(A''y + \frac{B''dy}{dx} + \frac{C''ddy}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{\Delta d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

fietque comparatione inſtituta

$A' = \beta A''$
$B' = \beta B'' + A''$
$C' = \beta C'' + B''$
$D' = \beta D'' = C''$
etc.

Ergo ſi ponatur

$$P'' = A'' + B''z + C''z^2 + D''z^3 + \ldots\ldots + \Delta z^{n-2}$$

erit $P' = (\beta + z)P''$, et $P'' = \frac{P'}{z+\beta} = \frac{P}{(z+\alpha)(z+\beta)}$ vnde fit $P'' = \Delta(z+\gamma)(z+\delta)(z+\varepsilon)$ etc. ſcilicet hinc duo iam factores $z+\alpha$ et $z+\beta$ ſunt egreſſi. Eſt autem:

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha} \int e^{\alpha x} X dx - \frac{1}{\beta-\alpha} \int e^{\beta x} X dx$$

vnde aequatio bis integrata reducitur ad hanc formam

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha-\beta} \int e^{\beta x} X\, dx = A''y + \frac{B''dy}{dx} + \frac{C''ddy}{dx^2} + \frac{D''d^3y}{dx^3} + \ldots\ldots \frac{\Delta d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

§. 11. Cum porro hinc poſito 1 pro y et z pro $\frac{dy}{dx}$ etc. prodeat haec expreſſio,

$$P'' = A'' + B''z + C''z^2 + \ldots\ldots + \Delta z^{n-2}$$

ſitque $P'' = \Delta(z+\gamma)(z+\delta)\ z+\varepsilon)$ etc.

manifeſtum eſt aequationem vltimo inuentam denuo reddi integrabilem ſi multiplicetur per $e^{\gamma x}dx$, ſit aequatio integralis hinc oriunda haec :

$$\int\frac{e^{(\gamma-\alpha)x}dx}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}Xdx + \int\frac{e^{(\gamma-\beta)x}dx}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}Xdx = e^{\gamma x}\Big(A'''y + \frac{B'''dy}{dx} + \frac{C'''ddy}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{\Delta d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\Big)$$

fietque ex comparatione terminorum homogeneorum :

$$A'' = \gamma A'''$$
$$B'' = \gamma B''' + A'''$$
$$C'' = \gamma C''' + B'''$$
$$D'' = \gamma D''' + C'''$$
etc.

Quare ſi ponatur :

$$P''' = A''' + B'''z + C'''z^2 + D'''z^3 + \ldots + \Delta z^{n-3}$$

erit $P'' = (\gamma + z)P'''$ et $P''' = \frac{P''}{z+\gamma} = \frac{P}{(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)}$
vnde ſequitur fore :

$$P''' = \Delta(z+\delta)(z+\varepsilon)(z+\zeta)\text{ etc.}$$

Cum autem ſit generaliter $\int e^{(\mu-\nu)x}dx\int e^{\nu x}Xdx = \frac{e^{(\mu-\nu)x}}{\mu-\nu}\int e^{\nu x}Xdx + \frac{1}{\nu-\mu}\int e^{\mu x}Xdx$, ſi hinc integralia reducantur reperietur.

$$\frac{e^{-\alpha x}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int e^{\alpha x}Xdx + \frac{e^{-\beta x}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\int e^{\beta x}Xdx + \frac{e^{-\gamma x}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int e^{\gamma x}Xdx$$
$$= A'''y + \frac{B'''dy}{dx} + \frac{C'''ddy}{dx^2} + \frac{D'''d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta d^{n-3}y}{dx^{n-3}}.$$

§. 12.

§. 12. Si hoc modo eo vſque progrediamur, quoad nulla amplius differentialia ipſius y ſuperſint, tum ex altera parte aequationis habebitur vnicus terminus $\frac{\Delta d^0 y}{dx^0} = \Delta y$; id quod eueniet, ſi integratio toties fuerit inſtituta quot maximus exponens n continet vnitates. Ad hoc ergo vltimum integrale commode exprimendum, cum ſit

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + \Delta z^n = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma) \text{ etc.}$$

formentur ex radicibus α, β, γ, δ, etc. ſequentes valores

$$\mathfrak{A} = \Delta(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\varepsilon-\alpha) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{B} = \Delta(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon-\beta) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{C} = \Delta(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)(\varepsilon-\gamma) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{D} = \Delta(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\varepsilon-\delta) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{E} = \Delta(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon) \text{ etc.}$$
etc.

quibus inuentis erit integralis aequatio vltima quae ſita:

$$y = \frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{\alpha x} X\,dx + \frac{e^{-\beta x}}{\mathfrak{B}} \int e^{\beta x} X\,dx + \frac{e^{-\gamma x}}{\mathfrak{C}} \int e^{\gamma x} X\,dx + \text{etc.}$$

quae cum tot contineat terminos, quoti gradus fuerit aequatio differentialis propoſita.

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n}$$

totidem inuoluet conſtantes arbitrarias, ideoque erit integralis completa.

§. 13. Alio autem modo valores quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. exprimi poſſunt, qui plerumque multo commodius negotium conficit. Dico enim fore $\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz}$,

 ſi

ſi vbique pro z ſubſtituatur $-\alpha$, ſeu ſi ponatur $z+\alpha = 0$. Cum enim ſit

$$P = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta) \text{ etc.}$$

erit differentiando:

$$\frac{dP}{dz} = \Delta(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)\text{etc.} + \frac{\Delta(z+\alpha)d}{dz}(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)\text{etc.}$$

Si iam ponatur $z = -\alpha$ poſterius membrum euaneſcet, et prius dabit:

$$\frac{dP}{dz} = \Delta(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha) \text{ etc.} = \mathfrak{A}.$$

Cum autem ſit $P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + \Delta z^n$ erit:

$$\frac{dP}{dz} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + n\Delta z^{n-1}$$

ponatur ergo $z = -\alpha$, ſeu fiat $z+\alpha = 0$, erit

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \text{etc.} \ldots \pm n\Delta\alpha^{n-1}$$

ſimili modo reperietur fore

$$\mathfrak{B} = B - 2C\beta + 3D\beta^2 - 4E\beta^3 + \ldots \pm n\Delta\beta^{n-1}$$

$$\mathfrak{C} = B - 2C\gamma + 3D\gamma^2 - 4E\gamma^3 + \ldots \pm n\Delta\gamma^{n-1}$$

etc.

§. 14. Si ergo huiusmodi proponatur aequatio:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

quam integrari oporteat, ante omnia ex ea formetur haec expreſſio Algebraica

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores ſimplices, cuiusmodi vnus ſit $z+\alpha$, atque quilibet factor dabit partem integralis ita vt omnes partes, quae hoc modo ex ſingulis factoribus eruuntur, iunctim ſumtae exhibeant completum ipſius

ſius y valorem finitum. Scilicet ſi factor ſimplex fuerit inuentur $z + \alpha$, tum quaeratur quantitas $\mathfrak{A}$ vt ſit

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \text{etc.}$$

qua inuenta erit pars integralis ex hoc factore $z + \alpha$ oriunda haec

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{\alpha x} X\, dx.$$

Hinc perſpicitur ſi factor ſimplex formae P fuerit $z - \alpha$; tum fore

$$\mathfrak{A} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \text{etc.}$$

atque integralis partem hinc oriundam eſſe

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{-\alpha x} X\, dx.$$

§. 15. Supereſt autem vt oſtendamus, quomodo iſtae integralis partes ſint comparatae, ſi factorum ſimplicium aliquot fuerint vel inter ſe aequales vel imaginariae. Ex ſuperioribus enim liquet vtroque caſu partes integralis ſingulari modo adornari debere, vt formam finitam et realem obtineant. Sint igitur primo duo factores $z - \alpha$ et $z - \beta$ inter ſe aequales ſeu $\beta = \alpha$, eritque tam $\mathfrak{A} = 0$ quam $\mathfrak{B} = 0$; et vtraque pars integralis euadet infinita, altera quidem affirmatiue altera negatiue, ita vt differentia ſit finita. Ad quam inueniendam ponamus $\beta = \alpha + \omega$, denotante ω quantitatem euaneſcentem. Cum ergo ſit

$$\mathfrak{A} = \Delta(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon) \text{ etc. et}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon) \text{ etc.}$$

ſumtis

ſumtis litteris α, β, γ, δ, etc. negatiuis, erit,

$$\mathfrak{A} = -\Delta\omega(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc. et}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta\omega(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc.}$$

Tum vero erit $e^{\beta x} = e^{\alpha x + \omega x} = e^{\alpha x}(1+\omega x)$ et $e^{-\beta x} = e^{-\alpha x}(1-\omega x)$. Hinc pars integralis ex factoribus binis aequalibus $z-\alpha$ et $z-\beta$ oriunda erit

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x} X dx + \frac{e^{\alpha x}(1+\omega x)}{\mathfrak{B}}\int e^{-\alpha x}(1-\omega x) X dx$$

Ponatur:

$$\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc.}$$

erit $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'\omega$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\omega$, vnde fiet iſta pars $=$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega}\left((1+\omega x)\int e^{-\alpha x}(1-\omega x) X dx - \int e^{-\alpha x} X dx\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega}\left(\omega x\int e^{-\alpha x} X dx - \omega\int e^{-\alpha x} X x dx\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\left(x\int e^{-\alpha x} X dx - \int e^{-\alpha x} X x dx\right) = \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\int dx\int e^{-\alpha x} X dx.$$

quae eſt pars integralis ex factore expreſſionis P quadrato $(z-\alpha)^2$ oriunda.

§. 16. Valor autem ipſius $\mathfrak{A}'$ ſequenti modo commodius exhiberi poterit. Ob $\beta = \alpha$, cum ſit

$P = \Delta(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)\text{etc.} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ etc.}$ ponatur $\Delta(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)$ etc. $= Q$, ita vt valor ipſius Q praebeat $\mathfrak{A}'$ ſi loco z ponatur α. Erit ergo $P = (z-\alpha)^2 Q$, et differentiando $\frac{dP}{dz} = (z-\alpha)^2\frac{dQ}{dz} + 2(z-\alpha)Q$ atque $\frac{ddP}{dz^2} = (z-\alpha)^2\frac{ddQ}{dz^2} + 4(z-\alpha)\frac{dQ}{dz} + 2Q$; poſito nunc $z = \alpha$ fiet $Q = \frac{ddP}{2dz^2} = \mathfrak{A}'$, orieturque $\mathfrak{A}'$ ſi in $\frac{ddP}{2dz^2}$ ponatur $z = \alpha$. Eſt vero

$$\frac{ddP}{2dz^2} = C + 3Dz + 6Ez^2 + 10Fz^3 + 15Gz^4 + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc.}$$

Quare ſi propoſita hac aequatione:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

expreſſio hinc formata

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

habeat factorem quadratum $(z-\alpha)^2$, ſumatur

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc.}$$

eritque pars integralis inde oriunda:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\int dx \int e^{-\alpha x} X\, dx.$$

Sin autem reliqui factores formulae P fuerint cogniti, nempe

$$P = \Delta(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon) \text{ etc.}$$

erit $\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)$ etc.

§. 17. Ponamus iam tres factores inter ſe eſſe aequales, ſeu ſit in ſuper $\gamma = \alpha$, at ob rationes ſupra expoſitas ponamus

$\gamma = \alpha + \omega$, erit $\mathfrak{A}' = -\Delta\omega(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

et $\mathfrak{C} = \Delta(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\gamma-\zeta)$ etc.

ſeu $\mathfrak{C} = \Delta\omega^2(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

ſit $\mathfrak{A}'' = \Delta(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

erit $\mathfrak{A}' = -\mathfrak{A}''\omega$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}''\omega^2$. Factisque his ſubſtitutionibus tandem reperietur pars integralis ex factore cubico $(z-\alpha)^3$ oriunda haec,

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx$$

exiſtente:

$$\mathfrak{A}''=D+4E\alpha+10F\alpha^2+20G\alpha^3+\text{etc.}$$

Facilius autem hoc immediate ex aequalitate trium factorum oſtenditur. Sint enim, tres factores quicunque $(z-\alpha)$ $(z-\beta)(z-\gamma)$ ac poſitos

$$\mathfrak{A}=\Delta(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)\ \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}=\Delta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)\ \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}=\Delta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\ \text{etc.}$$

erunt integralis partes hinc oriundae.

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x}X\,dx+\frac{e^{\beta x}}{\mathfrak{B}}\int e^{-\beta x}X\,dx+\frac{e^{\gamma x}}{\mathfrak{C}}\int e^{-\gamma x}X\,dx.$$

Ponatur iam $\beta=\alpha+\omega$ et $\gamma=\alpha+\Phi$, exiſtentibus ω et Φ quantitatibus euaneſcentibus, ac poſito

$$\mathfrak{A}''=\Delta(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)\ \text{etc.}$$

erit $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}''\omega\Phi$; $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}''\omega(\omega-\Phi)$, et $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}''\Phi(\Phi-\omega)$. tum vero erit $e^{\beta x}=e^{\alpha x}(1+\omega x+\frac{1}{2}\omega^2x^2)$, $e^{-\beta x}=e^{-\alpha x}(1-\omega x+\frac{1}{2}\omega^2x^2)$ et $e^{\gamma x}=e^{\alpha x}(1+\Phi x+\frac{1}{2}\Phi^2x^2)$, $e^{-\gamma x}=e^{-\alpha x}(1-\Phi x+\frac{1}{2}\Phi^2x^2)$. Quibus ſubſtitutis ternae integralis partes abeunt in:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''\omega\Phi(\omega-\Phi)}\left\{\begin{array}{l}\int e^{-\alpha x}X\,dx(\omega-\Phi+\Phi+\omega\Phi x+\frac{1}{2}\omega^2\Phi x^2-\omega-\omega\Phi x+\frac{1}{2}\omega\Phi^2x^2)\\ \int e^{-\alpha x}Xx\,dx(-\omega\Phi-\omega\omega\Phi x+\omega\Phi+\omega\Phi\Phi x)\\ \int e^{-\alpha x}Xx^2dx(\frac{1}{2}\omega\omega\Phi-\frac{1}{2}\omega\Phi\Phi)\end{array}\right.$$

ſublatis nunc per diuiſionem litteris euaneſcentibus ω et Φ factor cubicus $(z-\alpha)^3$ dabit hanc integralis partem

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}\left(\tfrac{1}{2}xx\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx - x\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}xdx + \tfrac{1}{2}\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}xxdx\right)$$

quae reducitur ad hanc formam ſimpliciorem:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx.$$

exiſtente $\mathfrak{A}'' = \mathrm{D} + 4\mathrm{E}\alpha + 10\mathrm{F}\alpha^2 + 20\mathrm{G}\alpha^3 +$ etc. ſcilicet valor ipſius $\mathfrak{A}''$ oritur ex formula $\frac{d^3P}{6dz^3}$ poſito $z = \alpha$.

§. 18. Simili modo vlterius procedendo patebit quaternos factores inter ſe aequales ſeu formulae $\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2 +$ etc. factorem $(z-\alpha)^4$ praebiturum fore hanc integralis partem:

$$\frac{e^{\alpha x}\int dx\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx}{\mathrm{E} + 5\mathrm{F}\alpha + 15\mathrm{G}\alpha^2 + 35\mathrm{H}\alpha^3 + \text{etc.}}$$

qui denominator ex formula $\frac{d^4P}{24dz^4}$ naſcitur ponendo $z = \alpha$. Superfluum foret pro pluribus factoribus ſimplicibus inter ſe aequalibus partes integralis, quae ex ipſis conflantur hic exhibere, cum lex, qua hae partes formantur, per ſe ſit manifeſta. Ceterum complicatio plurium ſignorum integralium in his formulis nullam inuoluit difficultatem, cum facillime ad ſimplicia integralia reuocentur. Eſt enim

$$\int dx\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx = \frac{x\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx - \int e^{-\alpha x}\mathrm{X}xdx}{1.}$$

$$\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx = \frac{x^2\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx - 2x\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}xdx + \int e^{-\alpha x}\mathrm{X}xxdx}{1.\ 2.}$$

$$\int dx\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx = \frac{x^3\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}dx - 3x^2\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}xdx + 3x\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}xxdx - \int e^{-\alpha x}\mathrm{X}x^3dx}{1.\ 2.\ 3.}$$

etc.

 §. 19.

§. 19. Expeditis factoribus aequalibus pergo ad factores imaginarios. Sint ergo formulae $P = \Delta(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)$ etc. $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ etc. bini factores $z-\alpha$ et $z-\beta$ imaginarii, qui hoc non obſtante multiplicato praebeant productum reale

$$zz - 2kz\,\text{coſ.}\,\Phi + kk$$

erit ergo $\alpha = k\,\text{coſ.}\,\Phi + k\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\Phi$

et $\beta = k\,\text{coſ.}\,\Phi - k\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\Phi$

harumque litterarum poteſtates quaecunque ita ſe habebunt.

$$\alpha^n = k^n\,\text{coſ.}\,n\Phi + k^n\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,n\Phi$$
$$\beta^n = k^n\,\text{coſ.}\,n\Phi - k^n\sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,n\Phi$$

Iam primo erit:

$$e^{\alpha x} = e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}\left(1 + \frac{k\sqrt{-1}}{1}x\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{kk}{1.2}x^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2 - \frac{k^3\sqrt{-1}}{1.2.3}x^3\,\text{ſin.}\,\Phi^3 + \frac{k^4}{1.2.3.4}x^4\,\text{ſin.}\,\Phi^4 - \text{etc}\right.$$

ideoque

$$e^{\alpha x} = e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}(\text{coſ}\,kx\,\text{ſin}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$e^{\beta x} = e^{kx\,\text{coſ.}\,\Phi}(\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$e^{-\alpha x} = e^{-kx\,\text{coſ.}\,\Phi}(\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$e^{-\beta x} = e^{-kx\,\text{coſ.}\,\Phi}(\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi)$$

Deinde cum ſit:

$$\mathfrak{A} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + 5F\alpha^4 + \text{etc. et}$$
$$\mathfrak{B} = B + 2C\beta + 3D\beta^2 + 4E\beta^3 + 5F\beta^4 + \text{etc.}$$

ſuperioribus valoribus pro α et β ſubſtitutis habebitur

$$\mathfrak{A} = \begin{matrix} B + 2Ck\,\text{coſ}\,\Phi + 3Dk^2\,\text{coſ.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.} \\ + (2Ck\,\text{ſin.}\,\Phi + 3Dk^2\,\text{ſin.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.})\sqrt{-1} \end{matrix}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{matrix} B + 2Ck\,\text{coſ.}\,\Phi + 3Dk^2\,\text{coſ.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.} \\ - (2Ck\,\text{ſin}\,\Phi + 3Dk^2\,\text{ſin.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.})\sqrt{-1}. \end{matrix}$$

§. 20.

§. 20. Cum autem $z-\alpha$ et $z-\beta$ ſint factores formulae $\mathrm{P}=\mathrm{A}+\mathrm{B}z+\mathrm{C}z^2+\mathrm{D}z^3+\mathrm{E}z^4+\text{etc.}$ erit

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}k\,\text{coſ.}\,\Phi+\mathrm{C}k^2\,\text{coſ.}\,2\Phi+\mathrm{D}k^3\,\text{coſ.}\,3\Phi+\mathrm{E}k^4\,\text{coſ.}\,4\Phi+\text{etc.}=0$$

$$\text{et}\quad \mathrm{B}k\,\text{ſin.}\,\Phi+\mathrm{C}k^2\,\text{ſin.}\,2\Phi+\mathrm{D}k^3\,\text{ſin.}\,3\Phi+\mathrm{E}k^4\,\text{ſin.}\,4\Phi+\text{etc.}=0$$

Ponatur nunc:

$$\mathfrak{M}=\mathrm{B}+2\mathrm{C}k\,\text{coſ.}\,\Phi+3\mathrm{D}k^2\,\text{coſ.}\,2\Phi+4\mathrm{E}k^3\,\text{coſ.}\,3\Phi+\text{etc.}$$
$$\mathfrak{N}=\qquad 2\mathrm{C}k\,\text{ſin.}\,\Phi+3\mathrm{D}k^2\,\text{ſin.}\,2\Phi+4\mathrm{E}k^3\,\text{ſin.}\,3\Phi+\text{etc.}$$

atque fiet:

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}\quad\text{et}\quad\mathfrak{B}=\mathfrak{M}-\mathfrak{N}\sqrt{-1}$$

ſicque imaginaria a realibus erunt ſeparata. Cum nunc ex ambobus factoribus $z-\alpha$ et $z-\beta$ naſcantur iſtae integralis partes

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}\,dx+\frac{e^{\beta x}}{\mathfrak{B}}\int e^{-\beta x}\mathrm{X}\,dx$$

hae abibunt in hanc formam:

$$\frac{(\mathfrak{M}-\mathfrak{N}\sqrt{-1})\,e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}\,dx+(\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1})\,e^{\beta x}\int e^{-\beta x}\mathrm{X}\,dx}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}$$

At eſt:

$$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}\mathrm{X}\,dx=\begin{cases}+e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\\ -\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\\ +\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\\ +e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\end{cases}$$

$$e^{\beta x}\int e^{-\beta x}\mathrm{X}\,dx=\begin{cases}+e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\\ +\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{coſ.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{ſin}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\\ -\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{coſ}\,kx\,\text{ſin}\,\Phi\\ +e^{kx\,\text{coſ.}\Phi}\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\int e^{-kx\,\text{coſ.}\Phi}\mathrm{X}\,dx\,\text{ſin.}\,kx\,\text{ſin.}\,\Phi\end{cases}$$

Partes ergo ambae integrales tranſibunt, imaginariis ſe mutuo ſublatis, in hanc formam,

 $2\mathfrak{M}$

$$\frac{2\mathfrak{M}\,e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left(\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi+\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin kx\sin.\Phi\right)$$

$$+\frac{2\mathfrak{N}\,e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left(\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi-\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi\right)$$

quae etiam hoc modo exprimi poteſt:

$$\frac{2\,e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

Haec ergo pars integralis oritur ex formulae $P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. factore trinomiali $zz - 2kz\cos.\Phi + kk$.

§. 21. Simili modo ſi bini huiusmodi factores trinomiales fuerint inter ſe aequales, ſeu ſi formula

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

factorem habuerit $(zz - 2kz\cos.\Phi + kk)^2$, pars integralis hinc oriunda reperietur ex formulis pro binis factoribus ſimplicibus aequalibus ſupra inuentis reperietur. Ponatur nempe

$$\mathfrak{M}' = C + 3Dk\cos.\Phi + 6Ek^2\cos.2\Phi + 10Fk^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{N}' = \quad 3Dk\sin\Phi + 6Ek^2\sin.2\Phi + 10Fk^3\cos 4\Phi + \text{etc.}$$

eritque integralis pars hinc oriunda,

$$\frac{2\,e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'+\mathfrak{N}\mathfrak{N}'}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}'\cos.kx\sin\Phi+\mathfrak{N}'\sin.kx\sin\Phi)\int dx\int e^{kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}'\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}'\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin\Phi\end{array}\right\}$$

Sin autem tres factores trinomiales radices imaginarias continentes fuerint inter ſe aequales, ſeu ſi formulae $P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ etc. factor fuerit $(zz - 2kz\cos.\Phi + kk)^3$ ſtatuatur

$\mathfrak{M}'' =$

$$\mathfrak{M}'' = D + 4Ek\cos.\Phi + 10Fk^2\cos.2\Phi + 20Gk^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N}'' = \quad 4Ek\sin.\Phi + 10Fk^2\sin.2\Phi + 20Gk^3\sin.3\Phi + \text{etc.}$$

atque pars integralis ex hoc factore oriunda erit

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}''\mathfrak{M}'' + \mathfrak{N}''\mathfrak{N}''}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}''\cos.kx\sin.\Phi + \mathfrak{N}''\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi + \\ (\mathfrak{M}''\sin.kx\sin.\Phi - \mathfrak{N}''\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

Hinc igitur iam lex perſpicitur, ſecundum quam iſtae integralis partes formari debent, ſi maior poteſtas formulae $zz - 2kz\cos.\Phi + kk$ fuerit factor ipſius P: ideoque omnes caſus, qui vnquam occurrere poſſunt hinc conficientur.

§. 22. Ex his ergo ſequenti modo reſolui poterit hoc

Problema.

Inuenire valorem ipſius y in quantitatibus finitis expreſſum, qui ipſi conuenit ex hac aequatione differentiali cuiuscunque gradus:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} \text{ etc.}$$

vbi differentiale dx ponitur conſtans, atque X denotat functionem quamcunque ipſius x.

Solutio.

Ex aequatione propoſita formetur ſequens formula Algebraica:

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores reales tam ſimplices, quam trinomiales, quippe qui factorum ſimplicium imaginariorum vices ſuſtinent; et ſi qui horum factorum inter

ſe

ſe fuerint aequales, ii coniunctim repraeſententur. Quo facto pro ſingulis factoribus quaerantur conuenientes integralis partes, atque omnes iſtae partes ex cunctis factoribus oriundae, ſi in vnam ſummam colligantur, dabunt valorem ipſius y quaeſitum, qui erit integrale completum aequationis propoſitae. Sequenti autem modo ex factoribus formulae P integralis partes reperientur.

I. *Si formulae* P *factor ſit* $z-k$

Ponatur $\mathfrak{R} = B + 2Ck + 3Dk^2 + 4Ek^3 + 5Fk^4 +$ etc. eritque integralis pars huic factori $z-k$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int e^{-kx} X\,dx.$$

II. *Si formulae* P *factor ſit* $(z-k)^2$

Ponatur $\mathfrak{R} = C + 3Dk + 6Ek^2 + 10Fk^3 + 15Gk^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^2$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

III. *Si formulae* P *factor ſit* $(z-k)^3$

Panatur $\mathfrak{R} = D + 4Ek + 10Fk^2 + 20Gk^3 + 35Hk^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^3$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

IV. *Si formulae* P *factor ſit* $(z-k)^4$

Ponatur $\mathfrak{R} = E + 5Fk + 15Gk^2 + 35Hk^3 + 70Ik^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^4$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

V. *Si*

V. *Si formulae* P *factor ſit* $zz - 2kz\cos.\Phi + kk$

Ponatur:

$$\mathfrak{M} = B + 2Ck\cos.\Phi + 3Dk^2\cos.2\Phi + 4Ek^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \qquad 2Ck\sin.\Phi + 3Dk^2\sin.2\Phi + 4Ek^3\sin.3\Phi + \text{etc.}$$

erit pars integralis factori $zz - 2kz\cos.\Phi + kk$ reſpondens:

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi + \mathfrak{N}\sin kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}X dx\cos.kx\sin.\Phi + \\ (\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi - \mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}X dx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

VI. *Si formulae* P *factor ſit* $(zz - 2kz\cos.\Phi + kk)^2$

Ponatur:

$$\mathfrak{M} = C + 3Dk\cos.\Phi + 6Ek^2\cos.2\Phi + 10Fk^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \qquad 3Dk\sin.\Phi + 6Ek^2\sin.2\Phi + 10Fk^3\sin.3\Phi + \text{etc.}$$

erit pars integralis factori $(zz - 2kz\cos.\Phi + kk)^2$ reſpondens:

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos kx\sin.\Phi + \mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X dx\cos.kx\sin.\Phi + \\ (\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi - \mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X dx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

VII. *Si formulae* P *factor ſit* $(zz - 2kz\cos.\Phi + kk)^3$

Ponatur:

$$\mathfrak{M} = D + 4Ek\cos.\Phi + 10Fk^2\cos.2\Phi + 20Gk^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \qquad 4Ek\sin.\Phi + 10Fk^2\sin.2\Phi + 20Gk^3\sin.3\Phi + \text{etc.}$$

erit pars integralis factori $(zz - 2kz\cos.\Phi + kk)^3$ reſpondens:

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi + \mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X dx\cos.kx\sin.\Phi + \\ (\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi - \mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X dx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

etc.

Omnes igitur iſtae partes ſingulis factoribus formulae P reſpondentes in vnam ſummam collectae dabunt valorem ipſius y quaeſitum. Q. E. I.

§. 23. Explicata hac regula, cuius ope omnes aequationes differentiales in forma generali contentae inte-

grari poſſunt, aliquot exempla adiungam, ex quibus regulae huius vſus facilius perſpicietur.

Exempl. I. Propoſita ſit haec aequatio differentialis ſecundi gradus.

$$X = y - \frac{ddy}{dx^2}$$

Hinc igitur formula Algebraica P erit $= 1 - zz$ cuius factores ſunt $z + 1$ et $z - 1$. et ex formula prima erit $\mathfrak{K} = \frac{dP}{dz} = -2z$. pro factore ergo $z + 1$ ob $k = -1$ erit $\mathfrak{K} = 2$ et pars integralis $= \frac{e^{-x}}{2} \int e^{x} X dx$. Pro altero factore eſt $k = 1$ et $\mathfrak{K} = -2$, cui reſpondet pars integralis $-\frac{e^{x}}{2} \int e^{-x} X dx$, quibus partibus collectis erit integrale quaeſitum.

$$y = \tfrac{1}{2} e^{-x} \int e^{x} X dx - \tfrac{1}{2} e^{x} \int e^{-x} X dx.$$

Exempl. 2. Propoſita ſit haec aequatio:

$$X = y - \frac{3a\,dy}{dx} + \frac{3aa\,ddy}{dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}$$

Erit ergo $P = 1 - 3az + 3aazz - a^3 z^3 = (1 - az)^3$. Sumenda ergo eſt formula tertia, eritque $k = \frac{1}{a}$, et $\mathfrak{K} = \frac{a^3 P}{6 \omega z^3} = -a^3$, vnde prodit integrale quaeſitum

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} \int dx \int dx \int e^{-x:a} X dx \text{ ſeu}$$

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} (x \int dx \int e^{-x:a} X dx - \int x dx \int e^{-x:a} X dx) \text{ ſeu}$$

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x.a} (\tfrac{1}{2} xx \int e^{-x:a} X dx - x \int e^{-x:a} X x dx + \tfrac{1}{2} \int e^{-x:a} X xx dx)$$

Exempl. 3. Propoſita ſit haec aequatio:

$$X = y + \frac{aa\,ddy}{dx^2}$$

Erit ergo $P = 1 + aazz$, quae ad formulam V pertinet. Erit nempe coſ. $\Phi = 0$ ſin. $\Phi = 1$, et $k = \frac{1}{a}$. Porro ob

A =

$A = 1$, $B = 0$ et $C = aa$, erit $\mathfrak{M} = 0$, et $\mathfrak{N} = 2a$, vnde erit integrale:

$$y = \frac{1}{a}\,\text{ſin.}\,\frac{x}{a}\int X\,dx\,\text{coſ.}\,\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\,\text{coſ.}\,\frac{x}{a}\int X\,dx\,\text{ſin.}\,\frac{x}{a}.$$

Exempl. 4. Propoſita ſit haec aequatio:

$$X = y + \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}$$

Erit ergo $P = 1 + a^3 z^3$, cuius duo ſunt factores $1 + az$ et $1 - az + aazz$, Prior ad formam $z - k$ reductus, dat $k = -\frac{1}{a}$; et ob $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, et $D = a^3$, erit ex formula prima $\mathfrak{K} = 3a$, et pars integralis:

$$\frac{1}{3a} e^{-x:a}\int e^{x:a} X\,dx.$$

Alter factor $1 - az + aazz$ ſeu $zz - \frac{z}{a} + \frac{1}{aa}$ cum formula V comparatus, dat $k = \frac{1}{a}$; coſ $\phi = \frac{1}{2}$ et ſin $\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ atque $\phi = 60^\circ$. Deinde eſt $\mathfrak{M} = 3a\,\text{coſ.}\,120^\circ = -\frac{3}{2}a$, et $\mathfrak{N} = 3a\,\text{ſin.}\,120^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$, vnde $\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = 9aa$, atque $\frac{2\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = -\frac{1}{3a}$ et $\frac{2\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3a}$. Pars integralis ergo hinc oriunda eſt:

$$\frac{1}{3a} e^{x:2a}\left(-\text{coſ}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a} + \sqrt{3}.\,\text{ſin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$+ \frac{1}{3a} e^{x:2a}\left(-\text{ſin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a} - \sqrt{3}.\,\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{ſin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$\text{ſeu} -\frac{2}{3a} e^{x:2a}\,\text{coſ.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$-\frac{2}{3a} e^{x:2a}\,\text{ſin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{ſin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}.$$

Hinc igitur integrale quaeſitum erit:

$$y = \frac{1}{3a} e^{-x:a}\int e^{x:a} X\,dx - \frac{2}{3a} e^{x:2a}\,\text{coſ.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$-\frac{2}{3a} e^{x:2a}\,\text{ſin}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{ſin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

Haec ergo exempla ſufficiunt ad regulam pro quouis caſu oblato accommodandam.

DE SERIERVM DETERMINATIONE SEV NOVA METHODVS INVENIENDI TERMINOS GENERALES SERIERVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Cum lex progreſſionis, quam termini cuiusque ſeriei tenent, in infinitum variare poſſit, non ſolum omnes diuerſae ſerierum ſpecies, ſed etiam ne genera quidem, quantumuis late extendantur, enumerari poſſe videntur. Hinc duae pluresque ſeries dantur, quae etiamſi tot, quot quis voluerit, habeant terminos communes, tamen inter ſe diſcrepent, ac maxime diuerſis legibus contineantur. Qui amplisſimum ſerierum campum vel obiter inſpexerit, facile intelliget, naturam ſeriei non determinari, quotcunque etiam eius termini exhibeantur. Sic ſi quaeratur, qualis ſit ſeries, quae ab his incipiat terminis: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; quaeſtio maxime eſt indeterminata; et praeter ſeriem numerorum imparium naturali ordine procedentium innumerabiles aliae aſſignari poſſunt ſeries, quae ab iisdem terminis incipiant: neque iſte determinationis defectus ad certum terminorum datorum numerum adſtringitur, ſed quantuſcunque is fuerit, infinitis ſeriebus communis eſſe poteſt.

§. 2. Clarius autem hoc perſpicietur, ſi naturam ſerierum ad Geometriam transferamus. Quaelibet enim ſeries

ſeries per lineam curuam repraeſentari poteſt, cuius applicatae per ipſos ſeriei terminos exprimantur, dum abſciſſae eorum indices, ſeu numeros, qui ordinem cuiusque termini deſignant, referunt. Hoc modo quilibet ſeriei terminus punctum in linea curua definit, quod datae abſciſſae reſpondet. Quare ſi ſeries requiratur, quae tot, quot libuerit, habeat terminos datos, quaeſtio huc redit, vt quaeratur linea curua, quae per totidem puncta data tranſeat. Perſpicuum autem eſt, quotcunque etiam data fuerint puncta, ſemper innumerabiles lineas curuas aſſignari poſſe, quae per ſingula ſimul tranſeant. Quod cum NEVTONVS *de ſolis curuis parabolicis* oſtendiſſet, ſi non ſolum omnes curuae Algebraicae, ſed etiam tranſcendentes admittantur, dubium eſt nullum, quin numerus curuarum ſatisfacientium inſuper infinities fiat maior.

§. 3. Magis mirum videbitur, ſi dixero, ſeriem nondum determinari, etiamſi innumeri eius termini dentur. Sic ſi hanc ſeriem $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc. ita definiam, vt dicam, in ea omnes numeros integros naturali ordine contineri, quis non putet hanc ſeriem penitus eſſe determinatam? cum cuiuis ſeriei loco ſuus terminus ſit aſſignatus: in loco enim, qui x vnitatibus ab initio diſtat, erit terminus $=$ ipſi numero x, ſeu terminus, cuius index $= x$, ipſe quoque erit $= x$. Quatenus autem illa ſeries ita vt factum eſt deſcribitur, plus inde non conſtat, niſi indici x, ſi fuerit x, numerus integer, reſpondere terminum $= x$: ſin autem pro indice x aſſumatur numerus fractus, nulla adhuc ratio adeſt, qua euinceretur, terminum iſti indici x reſpondentem eſſe $= x$. Oſtendam autem, ſi pro hac ſerie

 termi-

terminus indici x reſpondens ponatur $= y$, infinitis modis fieri poſſe, vt quoties x ſit numerus integer, toties ſemper fiat $y = x$, etiamſi numeris fractis pro x ſumendis, valores ipſius y ab x diſcrepent. Hinc etſi omnes ſeriei termini, qui indicibus integris reſpondent, ſunt determinati, intermedios tamen, qui indices habent fractos infinitis variis modis definire licet, ita vt interpolatio iſtius ſeriei maneat indeterminata.

§. 4. Quod, quo clarius perſpiciatur, ad arcus circulares eſt recurrendum: cum enim poſita ſemicircumferentia circuli $= \pi$ cuius radius ſit $= 1$; ſit ſinus arcus $n\pi = 0$, quoties n eſt numerus integer: manifeſtum eſt, ſi ponatur $y = x + P \text{ ſin. } \pi x$, denotante P, vel quantitatem conſtantem, vel functionem quamcunque ipſius x; ac pro x ſucceſſiue ponantur indices integri 1, 2, 3, 4, 5, etc: tum valores ipſius y futuros eſſe $= 1, 2, 3, 4, 5$, etc. perinde ac ſi eſſet $P = 0$. Neque tamen termini intermedii, qui indicibus fractis reſpondent, his ipſis indicibus erunt aequales. Sit enim e. g. $P = xx$ et ponatur $x = \frac{1}{2}$; ob ſin. $\frac{1}{2}\pi = 1$, fiet terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$. Infinitae autem aliae huiusmodi expreſſiones excogitari poſſunt, quae aeque ſatisfaciant, cuiusmodi ſunt: $y = x + P \text{ ſin. } \pi x + Q \text{ ſin. } 2\pi x + R \text{ ſin. } 3\pi x + S \text{ ſin. } 4\pi x$ etc. quibus interpolatio multo magis indeterminata redditur.

§. 5. Simile exemplum ſeriei, quae determinata videri queat, iam ante aliquod tempus exhibui: inueneram enim expreſſionem, ſeu functionem ipſius x, quae ſi loco x poteſtas quaecunque ipſius 10. ponatur, ipſi exponenti huius poteſtatis aequalis fiat, ſiquidem hic exponens ſit numerus integer affirmatiuus. Functio ſcilicet illa ipſius x, quam

quam littera y indicabo, ita erat comparata, vt poſito $x=1$, fiat $y=0$; et, ſi ponatur $x=10^n$, exiſtente n numero integro affirmatiuo, fit ſemper $y=n$: vnde ſequi videbatur, functionem y ſemper fore logarithmum vulgarem ipſius x. Nihilo vero minus monſtraui, ſi pro x non quaepiam denarii poteſtas ſubſtituatur, valorem ipſius y ſaepe numero non parum a logarithmo numeri x diſcrepare. Facta ergo ſerie, cuius ſint

Indices 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, etc. et
termini 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

ad deſcriptionem logarithmorum non ſufficit, ſi quis dicat, logarithmos eſſe terminos medios inferioris ſeriei, qui indicibus in ſuperiori ſerie aſſumtis reſpondeant.

§. 6. Cum igitur natura ſeriei non ex aliquot eius terminis, etiamſi eorum numerus ſit infinitus, determinetur; propterea quod interpolatio nihilominus maneat indeterminata, infinitiſque modis abſolui poſſit; facile perſpicitur, quam incertae ſint omnes illae interpolandi methodi, quae negotium ex ſolis terminis integros indices habentibus perficere docent. Neque enim interpolatio pro certa haberi poterit, niſi ipſa ſeriei natura ſpectetur, eiusque ratio in operatione habeatur. Perfecte autem natura ſeriei cognoſcitur, ſi eius terminus generalis, ſeu formula, quae cuiuis indici x, ſiue integro, ſiue fracto, ſiue etiam ſurdo, terminum reſpondentem exhibeat, fuerit cognita. Hoc enim modo non ſolum omnes ſeriei termini, qui indicibus integris reſpondent, determinantur, ſed etiam termini, qui indicibus quibuscunque non integris conueniunt, ſine ambiguitate definiuntur; ſicque interpolationis negotium nulla amplius incertitudine impeditur.

§. 7.

§. 7. Habentur autem praeter terminum generalem innumerabiles alii modi ſeries formandi: interim tamen omnes iſti modi commode ad tria genera reuocari poſſunt. Ad primum genus refero eos ſerierum formandarum modos, quibus terminus quisque ſeriei per ſolum indicem reſpondentem determinatur; quod cum per certas operationes in hunc finem inſtituendas efficiatur, formula iſtas operationes in genere complectens ipſe erit terminus generalis ſeriei, quo pacto ſeriem abſolute ac perfectiſſime determinari iam notaui. Ad genus ſecundum pertineant iſti ſeries formandi modi, quibus terminus quiuis ſeriei per aliquot terminos antecedentes ſecundum certam quandam regulam determinatur, qui modus in ſeriebus imprimis recurrentibus adhiberi ſolet Quando vero ad terminum quemuis ſeriei inueniendum non ſolum terminorum antecedentium ratio eſt habenda, ſed etiam ipſe index adhiberi debet, hinc tertium genus affirmationis ſerierum conſtituo.

§. 8. Si quilibet ſeriei terminus ex ſolo indice determinatur, tum ſiue numerus integer, ſiue fractus, pro indice aſſumatur, terminus reſpondens aeque definitur, ſicque interpolatio ſeriei, neque quicquam difficultatis, neque incertitudinis habet. Sin autem, vti in ſecundo genere poſuimus, quilibet terminus ex praecedente vel aliquot antecedentibus determinatur, tum primo vel aliquot primoribus terminis pro lubitu aſſumtis, ſinguli quidem termini, qui indicibus integris reſpondent, inuenientur, terminos vero intermedios, indicibus fractis conuenientes hinc definire non licet; quod idem de tertio genere eſt tenendum. Quamquam autem hoc modo in ſecundo et

tertio

tertio genere non ſolum omnes termini, qui indicibus integris reſpondent, aſſignantur, ſed etiam lex praeſcribitur inter terminum quemuis eiusque antecedentes, quae ad terminos indicum fractorum aeque patet; tamen ne hoc quidem modo ſeries penitus determinatur, ſed pro qualibet ſerie huius generis infiniti termini generales exhiberi poſſunt, qui dum eosdem terminos pro indicibus integris praebent, tamen pro fractis diſſentiunt.

§. 9. Quod cum merito maxime paradoxon videatur, operae pretium erit, hunc determinationis defectum in ſeriebus, quarum quisque terminus ex antecedentibus definitur, diligentius perpendere. Sumamus ergo caſum ſimpliciſſimum, ſeriemque ita definiri concipiamus, vt quilibet terminus aequalis ſit antecedenti ipſi. Quodſi iam primus ſeriei terminus ſtatuatur $= 1$, ſecundus quoque erit $= 1$, omnesque ſequentes, qui indicibus integris reſpondent, vnitati aequabuntur, naſceturque haec ſeries:

Indic:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	etc.
Term:	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	etc.

atque manifeſtum eſt, indici cuicunque integro x reſpondere terminum $= 1$. Quemadmodum autem termini indicibus fractis reſpondentes ſe ſint habituri, hinc non definitur: hoc tantum conſtat, ſi terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens fuerit $= a$ omnes quoque terminos, qui indicibus $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. conueniunt, fore $= a$. Omnes enim terminos, quorum indices vnitate, vel aliquot vnitatibus, differunt, per legem praeſcriptam inter ſe aequales eſſe oportet: quia antecedens quisque terminus intelligitur is, cuius index eſt vnitate minor.

§. 10. Haec igitur ſeries ita definitur, vt, ſi terminus indici x reſpondens ponatur $= y$, ſequens vero terminus indici $x + 1$ reſpondens $= y'$, habeatur $y' = y$; tum vero praeterea aſſumitur, ſi fuerit $x = 1$, fore quoque $y = 1$. Quare ſi pro hac ſerie terminus generalis deſideretur, is eiusmodi functio ipſius x eſſe debet, quae ſit $= y$, vt ſi loco x ponatur $x + 1$ functionis y valor reſultans y' aequalis ſit futurus ipſi y, atque vt facto $x = 1$ fiat $y = 1$. Manifeſtum autem eſt, ſi generatim ponatur $y = 1$, huic conditioni ſatisfieri, hocque caſu non ſolum terminos, qui indicibus integris, ſed etiam eos, qui fractis reſpondeant, vnitati aequales fore At vero his conditionibus infinitis quoque aliis modis ſatisfieri poteſt: ſi enim ponatur $y = 1 + \alpha$ ſin. $2 \pi x$, denotante π ſemicircumferentiam circuli, cuius radices $= 1$, erit $y' = 1 + \alpha$ ſin. $2 \pi (x + 1)$; at eſt ſin $2 \pi (x + 1) =$ ſin. $2 \pi x$, ideoque $y' = y$, tum vero poſito $x = 1$ erit $y = 1$. Hoc vero caſu termini intermedii, ſeu qui indicibus fractis reſpondent, non amplius vnitati aequabuntur, poſito enim $x = \frac{1}{4}$ erit $y = 1 + \alpha$.

§. 11. Quoniam hic non ſolum α pro arbitrio aſſumi poteſt, ſed etiam innumerabiles aliae eiusmodi formulae excogitari poſſunt, quae praeſcriptas conditiones adimpleant, cuiusmodi ſunt $y = 1 + \alpha$ ſin. $2 \pi x + \beta$ ſin. $4 \pi x + \gamma$ ſin. $6 \pi x +$ etc. perſpicuum eſt, interpolationem vel huius ſimpliciſſimae ſeriei $1 + 1 + 1 +$ etc. quatenus aliter non definitur, niſi quod quilibet terminus antecedenti aequalis eſſe, primus vero vnitate exprimi dicatur, interpolationem maxime eſſe indeterminatam: cum termini intermedii indices habentes fractos, quibuscunque numeris

meris aequales eſſe queant. Interim tamen etiamſi innumerabiles termini generales pro hac ſerie exhiberi queant, tamen ii omnes in lege quadam generali continentur, atque ſine diuinatione per analyſin inueniri poſſunt. Methodus ſcilicet latiſſime patens tradi poteſt, cuius ope omnium ſerierum, quarum termini per antecedentes, ſiue ſine indice, ſiue cum indice, definiuntur, terminos generales vniuerſaliſſime inueniri licet: quam methodum, cum non ſolum pleniorem ſerierum cognitionem ſuppeditet, ſed etiam non contemnenda analyſeos augmenta complectatur, hic diligentius euoluere conſtitui: quem in finem ſequentia problemata pertractabo.

Problema.

§. 12. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus aequalis ſit antecedenti, terminus vero primus $= 1$.

Solutio.

Sit terminus generalis ſeu is, qui indici x reſpondet $= y$, ac ponatur terminus ſequens, (cuius index $= x + 1$) $= y'$ debebitque eſſe $y' = y$; ac poſito $x = 1$, fieri debet $y = 1$. Cum iam ſit y quaepiam functio ipſius x, per naturam calculi differentialis, ſi loco x ponatur $x + 1$, fiet:

$$y' = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

ſumto differentiali dx conſtante. Quocirca eſſe debet:

$$0 = \frac{dy}{1.dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Haecque aequatio omnes omnino ſatisfacientes valores ipſius y continet, dummodo integratio ita temperetur, vt poſito $x = 1$ fiat $y = 1$, ſeu quod eodem redit, vt

 poſito

poſito $x = 0$ fiat $y = 1$. Quaeſtio itaque perducta eſt ad reſolutionem iſtius aequationis differentialis, quae non ſolum infinito terminorum numero conſtat, ſed etiam omnes differentialium gradus in ſe complectitur. Quia vero variabilis y vbique plus vna dimenſione non habet, et alterius variabilis x non niſi differentiale dx, quod conſtans eſt aſſumtum, occurrit, haec aequatio eo modo tractari poteſt, quem in *Miſcell. Berol. Tomo. VII.* expoſui. Formetur igitur ponendo z loco $\frac{dy}{dx}$; z^2 loco $\frac{ddy}{dx^2}$ et generatim z^n loco $\frac{d^ny}{dx^n}$ aequatio Algebraica:

$$0 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

quae ſumto e pro numero cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, tranſit in hanc formam finitam $0 = e^z - 1$. Huius iam aequationis omnes radices, quarum numerus eſt infinitus, inueſtigari, ſeu omnes factores formulae $e^z - 1$ aſſignari oportet. Eſt vero $e^z = (1 + \frac{z}{n})^n$, poſito n numero infinito, qui valor, ſi ſubſtituatur, habebitur haec formula reſoluenda $(1 + \frac{z}{n})^n - 1$, cuius quidem vnus factor ſimplex eſt $= \frac{z}{n}$ ſeu z: quem aequatio infinita ſtatim monſtrat. Ad reliquos inueniendos in ſubſidium vocari debet Theorema, quo demonſtratur formulae binomiae $a^n - b^n$ factorem eſſe $aa - 2ab \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n} + bb$ denotante k numerum quemuis integrum. Praeſenti ergo caſu eſt $a = 1 + \frac{z}{n}$ et $b = 1$, vnde formulae propoſitae $e^z - 1$ omnes factores continentur in hac forma generali.

$$1 + \frac{2z}{n} + \frac{zz}{nn} - 2(1 + \frac{z}{n}) \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n} + 1$$

ſeu $2(1 + \frac{z}{n}) \operatorname{ſin.} \frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}$: vnde hunc factorem per

quan-

quantitatem conſtantem 2 ſin. $\frac{2k\pi}{n}$ diuidendo erit factor generalis $= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{2\,nn\,\text{ſin.}\,v\,\frac{2k\pi}{n}}$. Cum iam n ſit numerus infinitus erit coſ. $\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$ et ſin. v, $\frac{2k\pi}{n} = \frac{2kk\pi\pi}{nn}$: quo valore ſubſtituto, erit factor formulae $e^z - 1$ generalis $= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4kk\pi\pi}$, et loco k ſucceſſiue omnes numeros integros 1, 2, 3, 4, etc. ſubſtituendo orientur omnes omnino factores formulae $e^z - 1$. At primus factor z dat integralis partem conſtantem, quae ſit $= C$: reliqui vero factores, qui ad hanc formam reducuntur

$$4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{n}z + zz;$$

ſi cum forma factorum, quos in ante allegata diſſertatione euolui, $ff - 2fz\,\text{coſ.}\,\phi + zz$ comparentur, erit $f = 2k\pi$ et coſ. $\phi = -\frac{k\pi}{n}$; et ſin. $\phi = 1$ ob n numerum infinitum, quo caſu eſt coſ. $\phi = 0$. Pars ergo integralis hinc oriunda erit

$$\alpha e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x}\,\text{ſin.}\,2k\pi x + \mathfrak{A} e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x}\,\text{coſ.}\,2k\pi x;\ \text{ſeu ob}\ n = \infty$$

$\alpha\,\text{ſin.}\,2k\pi x + \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,2k\pi x$. Subſtitutis ergo pro k ſucceſſiue omnibus numeris integris 1, 2, 3, 4, etc. proueniet integrale aequationis inuentae.

$$0 = \frac{1dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1\ldots4dx^4} + \text{etc.}$$

ſequenti forma expreſſum:

$$y = C + \alpha\,\text{ſin.}\,2\pi x + \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,2\pi x + \beta\,\text{ſin.}\,4\pi x + \mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,4\pi x + \gamma\,\text{ſin.}\,6\pi x + \mathfrak{C}\,\text{coſ.}\,6\pi x + \text{etc.}$$

Iam conſtans C ita definiatur vt poſito $x = 0$ fiat $y = 1$ reperieturque terminus generalis ſeriei propoſitae:

$$y = 1 + \alpha \text{ſin.}\, 2\pi x + \mathfrak{A}(\text{coſ.}\, 2\pi x - 1) +$$
$$+ \beta \text{ſin.}\, 4\pi x + \mathfrak{B}(\text{coſ.}\, 4\pi x - 1) +$$
$$+ \gamma \text{ſin.}\, 6\pi x + \mathfrak{C}(\text{coſ.}\, 6\pi x - 1) +$$
$$\text{etc.}$$

Quicunque ergo valores loco $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. ſubſtituantur, ſemper prodibit formula, quae terminum generalem ſeriei propoſitae exhibet. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 13. Si terminus primus, cui omnes reliqui, habentes exponentes integros, ſunt aequales, non debeat eſſe vnitas, ſed quantitas quaecunque, terminus generalis ſeriei y, ſeu terminus, qui indici x reſpondet, reperitur:

$$y = a + \alpha \text{ſin.}\, 2\pi x + \beta \text{ſin.}\, 4\pi x + \gamma \text{ſin.}\, 6\pi x + \delta \text{ſin.}\, 8\pi x$$
$$+ \mathfrak{A} \text{coſ.}\, 2\pi x + \mathfrak{B} \text{coſ.}\, 4\pi x + \mathfrak{C} \text{coſ.}\, 6\pi x + \mathfrak{D} \text{coſ.}\, 8\pi x \ \text{etc.}$$

eritque terminus quilibet indicem habens numerum integrum $= a + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} +$ etc.

Coroll. 2.

§ 14. Quia ſinus et coſinus arcuum $4\pi x$, $6\pi x$, $8\pi x$ etc. per poteſtates ipſorum ſin. $2\pi x$ coſ. $2\pi x$ exprimi poſſunt; atque viciſſim omnes functiones rationales, ſeu quae ambiguas ſignificationes non habent, per huiusmodi ſeries, qualem pro y inuenimus, exhiberi poſſunt: terminum generalem y ita definire poterimus, vt dicamus, y eſſe functionem quamcunque ipſorum ſin. $2\pi x$ et coſ. $2\pi x$: dummodo non occurrant huiusmodi formulae $\sqrt{(1 + \text{coſ.}\, 2\pi x)}$, aliaeque ſimiles, quae inuoluunt ſinus vel coſinus angulorum ſubmultiplorum ipſius $2\pi x$.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 15. His igitur caſibus excluſis, ſi ponamus ſin. $2\pi x = p$ et coſ $2\pi x = q$, erit y aequalis functioni cuicunque ipſarum p et q: vnde iſta aequatio differentialis infinita

$$0 = \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

in genere ita integrabitur, vt ſit y functio quaecunque ipſarum p et q.

Coroll. 4.

§. 16. Sin autem vocemus ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, erit $p = 2rs$ et $q = ss - rr$; et functiones ipſarum p et q erunt functiones parium dimenſionum ipſarum r et s. Quare ex illa aequatione differentiali infinita valor ipſius y in genere aequabitur functioni cuicunque parium dimenſionum ipſarum r et s, vbi notandum ob ſinum totum $= 1$ eſſe $rr + ss = 1$.

Coroll. 5.

§. 17. Ponatur $\frac{x}{a}$ loco x, vt habeatur iſta aequatio

$$0 = \frac{a\,dy}{1\,dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{a^4d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

Si iam ponamus ſin. $\frac{\pi x}{a} = r$ et coſ. $\frac{\pi x}{a} = s$, integrale iſtius aequationis ita deſcribetur, vt ſit $y =$ functioni cuicunque parium dimenſionum ipſarum r et s.

Coroll. 6.

§. 18. Gemina ergo formula pro valore huius integralis exhiberi poteſt, quarum altera eſt:

$$y = \frac{A + Br^2 + Crs + Dss + Er^4 + Fr^3s + Gr^2s^2 + Hrs^3 + Is^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta r^2 + \gamma rs + \delta s^2 + \varepsilon r^4 + \zeta r^3s + \eta r^2s^2 + \theta rs^3 + \iota s^4 + \text{etc.}}$$

altera vero forma erit:

$y =$

$$y = \frac{Ar + Bs + Cr^3 + Dr^2s + Ers^2 + Fs^3 + Gr^5 + \text{etc.}}{\alpha r + \beta s + \gamma r^3 + \delta r^2 s + \varepsilon r s^2 + \zeta s^3 + \eta r^5 + \text{etc.}}$$

Coroll. 7.

§. 19. Quicunque ergo huiusmodi valor pro y in aequatione:

$$0 = \frac{a\,dy}{1\,dx} + \frac{a^2\,ddy}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{a^4\,d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} + \text{etc.}$$

ſubſtituatur, aequatio prodibit identica: ſeu ſeries proueniet infinita, cuius ſumma erit $= 0$. Pro differentiationibus autem continuis tenendum eſt eſſe $\frac{dr}{dx} = \frac{\pi s}{a}$ et $\frac{ds}{dx} = -\frac{\pi r}{a}$ ideoque per ſubſtitutionem differentialia dx ſe mutuo vbique tollent.

Scholion 1.

§. 20. Notari etiam merentur factores, in quos expreſſio Algebraica infinita: $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.}$ ſupra eſt reſoluta. Cum enim primus factor ſimplex ſit $= z$, et reliqui trinomiales in hac forma generali contineantur: $1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4kk\pi\pi}$; ſi loco k ſucceſſiue ponantur numeri 1, 2, 3, 4, etc. Ponamus breuitatis gratia:

$$Z = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

eritque per factores infinitos:

$$Z = z\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{36\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{64\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

quorum factorum, excepto primo, numerus eſt infinitus atque $= \frac{1}{2}n$. Sit igitur $\frac{1}{2}n = m$ ſeu $n = 2m$, ac ponatur $z = 2v$ erit $\frac{2v}{1} + \frac{2^2v^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^4v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$

$$2v\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{16\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

ideoque

ideoque ſequens productum infinitorum factorum, quorum numerus eſt $= m$, erit:

$$\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{16\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

$$=1+\frac{2}{1\cdot 2}v+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}v^2+\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^3+\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4+\text{ etc.}$$

Quodſi iam illud productum actu euoluatur, quia factorum numerus eſt $= m$, exiſtente m numero infinito, proueniet:

$$1+v+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{vv}{mm}+\frac{vv}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{v^3}{m^3}+\frac{(m-1)v^3}{m\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)$$

etc.

qui termini cum ſerie iam inuenta comparati dabunt

$$1=\frac{2}{1\cdot 2};\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)=\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)=\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

Vnde vtrinque habetur:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{ etc.}=\frac{1}{6}\pi\pi$$

quae eſt eadem ſummatio, quam iam ante complures annos primus inveneram; pluribusque demonſtrationibus confirmaueram. Ceterum hinc perſpicuum eſt, etiamſi ſit in his factoribus m numerus infinitus; tamen alterum terminum $\frac{v}{m}$ omitti non licere: cum in euolutione ob replicationem infinitam ex terminis infinite paruis $\frac{v}{m}$ termini finiti exſurgant. Quando autem quilibet factor ſeorſim conſideratur, vt in formatione integralis fecimus, tum ſine errore hos terminos infinite paruos praetermittere licuit.

Scholion 2.

§ 21. Altiores quoque poteſtates terminorum ſeriei

 1 +

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+$ etc. ex hac fonte ſummare licet, eaedemque expreſſiones prodibunt, quas iam olim erueram. Ne autem calculus nimis fiat prolixus, ſequenti modo facile expediri poterit. Ponatur

$$V=1+\frac{2v}{1\cdot2}+\frac{2^2v^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2^3v^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{2^4v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{etc.}$$

erit $V=\frac{e^{2v}-1}{2v}$ et $\frac{dV}{Vdv}=\frac{2e^{2v}}{e^{2v}-1}-\frac{1}{v}$; quae reducitur ad hanc formam commodiorem: $\frac{dV}{Vdv}=\frac{2e^{v}}{e^{v}-e^{-v}}-\frac{1}{v}$

$$=\frac{1+\frac{v}{1}+\frac{v^2}{1\cdot2}+\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\text{etc.}}{\frac{v}{1}+\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{v^7}{1\cdots7}+\text{etc.}}-\frac{1}{v}$$: ita vt

fit $$\frac{dV}{Vdv}-1=\frac{1+\frac{v^2}{1\cdot2}+\frac{v^4}{1\cdots3\cdot4}+\frac{v^6}{1\cdot2\cdots6}+\text{etc.}}{\frac{v}{1}+\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{v^7}{1\cdot2\cdots7}+\text{etc.}}-\frac{1}{v}$$

ſeu $$\frac{dV}{Vdv}-1=\frac{\frac{2v}{1\cdot2\cdot3}+\frac{4v^3}{1\cdot2\cdots5}+\frac{6v^5}{1\cdot2\cdots7}+\frac{8v^7}{1\cdot2\cdots9}+\text{etc.}}{1+\frac{v^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{v^4}{1\cdot2\cdots5}+\frac{v^6}{1\cdot2\cdots7}+\frac{v^8}{1\cdot2\cdots9}+\text{etc.}}$$

Ponatur $\frac{dV}{Vdv}=1+\mathfrak{A}v-\mathfrak{B}v^3+\mathfrak{C}v^5-\mathfrak{D}v^7+\mathfrak{E}v^9-$ etc.

erit $\mathfrak{A}=\frac{2}{1\cdot2\cdot3}$

$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot2\cdot3}-\frac{4}{1\cdot2\cdots5}$

$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot2\cdot3}-\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot2\cdots5}+\frac{6}{1\cdots7}$

$\mathfrak{D}=\frac{\mathfrak{C}}{1\cdot2\cdot3}-\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot2\cdots5}+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot2\cdots7}-\frac{8}{1\cdot2\cdots9}$

etc.

His valoribus inuentis conſideretur altera forma quantitatis V per factores expreſſa, haec:

$$V=\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{1\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

ex

ex qua per differentiationem elicitur:

$$\frac{dV}{Vdv}=\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{1\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{1\pi\pi}}+\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{4\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}}+\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{9\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}}+\text{etc.}$$

Generaliter vero eſt

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}}=\frac{1}{m}+\left\{\begin{matrix}\frac{2}{\lambda\pi\pi}\\-\frac{1}{mm}\end{matrix}\right\}v\left\{\begin{matrix}-\frac{3}{m\lambda\pi\pi}\\+\frac{1}{m^3}\end{matrix}\right\}v^2\left\{\begin{matrix}+\frac{4}{m^2\lambda\pi\pi}\\-\frac{1}{m^4}\\-\frac{2}{\lambda\lambda\pi^4}\end{matrix}\right\}v^3\ \text{etc.}$$

Cum autem ſit m numerus infinitus, ipſique factorum numerus aequalis, excepto primo termino, reliqui per m diuiſi ſine errore praetermitti poterunt, ita vt ſit

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}}=\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}-\frac{2v^3}{\lambda^2\pi^4}+\frac{2v^5}{\lambda^3\pi^6}-\frac{2v^7}{\lambda^4\pi^8}+\text{etc.}$$

ſubſtitutis ergo pro λ ſucceſſiue numeris quadratis 1, 4, 9, 16 etc. hisque ſeriebus, quarum numerus eſt m in vnam ſummam coniectis, reperietur:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{Vdv}=1&+\frac{2v}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)\\&-\frac{2v^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\text{etc.}\right)\\&+\frac{2v^5}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\text{etc.}\right)\\&-\frac{2v^7}{\pi^8}\left(1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\text{etc.}\right)\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Quodſi iam haec ſerie cum prius inuenta comparetur habebitur:

$$\begin{aligned}1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\pi^2=\tfrac{1}{6}\pi^2\\1+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{9^2}+\tfrac{1}{16^2}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\pi^4=\tfrac{1}{90}\pi^4\\1+\tfrac{1}{4^3}+\tfrac{1}{9^3}+\tfrac{1}{16^3}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}\pi^6=\tfrac{1}{945}\pi^6\\1+\tfrac{1}{4^4}+\tfrac{1}{9^4}+\tfrac{1}{16^4}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\pi^8=\tfrac{1}{9450}\pi^8\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Hocque modo ſummationes a me iam olim exhibitae magis confirmantur, cum non nullis principium, quo tum vſus fueram, lubricum eſſet viſum.

Problema. II.

§. 22. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus excedat praecedentem data quantitate, et cuius terminus primus ſit datus.

Solutio.

Sit terminus primus $= a$, et exceſſus cuiusque termini ſupra praecedentem $= g$, erunt vtique termini indicibus integris reſpondentes hi:

1	2	3	4	5	6	7	
a,	$a+g$;	$a+2g$;	$a+3g$;	$a+4g$;	$a+5g$;	$a+6g$;	etc.

ita vt indici integro x conueniat terminus $y = a + (x-1)g$. At exiſtente x numero quocunque infinitae aliae formulae pro y locum inueniunt. Sit enim y' terminus indici $x+1$ reſpondens, erit:

$$y' = y + \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Cum iam per hypotheſin eſſe debeat $y' = y + g$, erit

$$g = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Quamuis huiusmodi aequationum, vbi praeter terminos, qui differentialia ipſius y continent, adeſt terminus, vel conſtans, vel functio quaecunque ipſius x, reſolutionem ante aliquod tempus tradiderim, tamen expediet per ſubſtitutionem $y = + gx + u$ hunc terminum g tollere, erit enim $dy = gdx + du$, $ddy = ddu$, $d^3y = d^3u$, etc. ob dx conſtans. Fiet ergo

$o =$

$$o = \frac{du}{1dx} + \frac{ddu}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{d^3u}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{d^4u}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{etc.}$$

Quae aequatio cum conueniat cum ea, quam in problemate praecedente inuenimus: ſi ponamus ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$: erit u functio quaecunque parium dimenſionum ipſarum r et s, cuiusmodi §. XVIII exhibuimus; hacque inuenta erit terminus generalis quaeſitus $y = A + gx + u$, dummodo conſtans A ita definiatur, vt poſito $x = a$ fiat $y = a$ Q. E. I.

Problema. III.

§ 23. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus prodeat, ſi praecedens per datum numerum m multiplicetur, et cuius terminus primus ſit $= a$.

Solutio.

Termini ergo huius ſeriei, qui indices habent integros, ſequentem progreſſionem Geometricam conſtituent:

1	2	3	4	5	6	
a,	ma;	m^2a;	m^3a;	m^4a;	m^5a;	etc.

ita vt indici integro x reſpondeat terminus am^{x-1}. Sit igitur generatim y terminus indici x, et y' terminus indici $x+1$ conueniens: eritque $y' = my$. At eſt

$$y' = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{etc.} = my.$$

Ad hanc aequationem reſoluendam, ponatur ſecundum praecepta data 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$: etc. vt prodeat ſequens aequatio Algebraica:

$$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

cuius radices ſingulas inueſtigari oportet. Erit autem $m = e^z$, at ſit logarithmus hyperbolicus ipſius $m = \lambda$, vt ſit $m = e^\lambda$, ideoque $e^\lambda - e^z = 0$. Quia vero ſumto n numero infinito eſt $e^\lambda = (1 + \frac{\lambda}{n})^n$ et $e^z = (1 + \frac{z}{n})^n$, habebitur iſta aequatio, cuius radices ſunt inueſtigandae:

$$(1 + \frac{\lambda}{n})^n - (1 + \frac{z}{n})^n = 0,$$

cuius quidem ſtatim vna radix $z - \lambda = 0$ conſtat, vnde pars integralis obtinetur $y = \alpha e^{\lambda x} = \alpha m^x$ ob $e^\lambda = m$. Reliquae radices ſunt imaginariae et continentur in hoc factore trinomio:

$$(1 + \frac{\lambda}{n})^2 - 2(1 + \frac{\lambda}{n})(1 + \frac{z}{n}) \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n} + (1 + \frac{z}{n})^2$$

exiſtente k numero quocunque integro: quae forma tranſit in hanc:

$$2 + \frac{2\lambda}{n} - 2(1 + \frac{\lambda}{n}) \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n} + \frac{\lambda\lambda}{nn}$$
$$+ \frac{2z}{n} - \frac{2z}{n}(1 + \frac{\lambda}{n}) \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}$$

Verum ob n numerum infinitum eſt $\operatorname{coſ} \frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$. Multiplicata ergo illa forma per nn, erit factor generalis $= 2n(n + \lambda)(1 - \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n}) + \lambda\lambda + 2nz(1 - \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n}) - 2\lambda z \operatorname{coſ.} \frac{2k\pi}{n} + zz = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi z}{n} - 2\lambda z + zz$; neglectis terminis euaneſcentibus: quo reſpectu etiam terminus $\frac{4kk\pi\pi z}{n}$ omitti poteſt, ita vt factor generalis ſit:

$$\lambda\lambda + 4kk\pi\pi - 2\lambda z + zz$$

horumque factorum numerus, ſi pro k ſucceſſiue numeri 1, 2, 3, 4, etc. ſubſtituantur, erit $= \frac{n}{2}$. Haec autem forma cum generali in *diſſertatione mea Tom. VII. Miſcell.* tradita, $ff - 2fz \operatorname{coſ.} \Phi + zz$ dabit $f = \sqrt{(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$

et

et coſ. $\Phi = \frac{\lambda}{\surd(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$, hincque ſin. $\Phi = \frac{2k\pi}{\surd(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$.
Vnde naſcitur haec integralis y pars,

$$y = e^{\lambda x}(\alpha \text{ ſin. } 2k\pi x + \mathfrak{A} \text{ coſ. } 2k\pi x).$$

Subſtitutis igitur pro k ſucceſſiue valoribus, ob $e^\lambda = m$ reperietur:

$$y = m^x \left\{ \begin{array}{l} C + \alpha \text{ ſin. } 2\pi x + \beta \text{ ſin. } 4\pi x + \gamma \text{ ſin. } 6\pi x + \text{ etc.} \\ + \mathfrak{A} \text{ coſ. } 2\pi x + \mathfrak{B} \text{ coſ. } 4\pi x + \mathfrak{C} \text{ coſ. } 6\pi x + \text{ etc.} \end{array} \right\}$$

Quare cum poſito $x = 1$ fieri debeat $y = a$, erit
$a = m(C + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.})$ Vnde conſtans C definitur. Seu ſi poſitis ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, ſit Q functio quaecunque parium dimenſionum ipſarum r et s, erit terminus generalis quaeſitus $y = m^x Q$. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 24. In progreſſione ergo Geometrica, quatenus ita tantum deſcribitur, vt quisque terminus ad praecedentem rationem conſtantem habere dicatur, interpolatio non eſt determinata, cum termini intermedii infinitis diverſis modis exprimi, imo quemuis valorem recipere queant.

Coroll. 2.

§. 25. Huius ergo aequationis differentialis infinitae

$$(m-1)y = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{ etc.}$$

integrale completum generaliter exprimi poteſt. Poſitis enim ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, ſi Q denotet functionem quamcunque ipſarum r et s erit $y = m^x Q$: ideoque $m^{-x}y$ functioni cuicunque parium dimenſionum ipſarum r et s aequatur.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 26. Si pro x ſcribatur $\frac{x}{a}$ prodibit haec aequatio:
$(m-1)y = \frac{a\,dy}{1\,dx} + \frac{aaddy}{1.2\,dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{a^4d^4y}{1.\ldots 4\,dx^4} + \text{etc.}$
Ad quam integrandam ponatur ſin. $\frac{\pi x}{a} = r$ et coſ. $\frac{\pi x}{a} = s$. ſignificetque Q functionem quamcunque parium dimenſionum ipſarum r et s, ita vt Q eundem valorem retineat, etiamſi pro r et s ſcribantur $-r$ et $-s$. Quo facto, erit $y = m^{x:a}Q$.

Coroll. 4.

§. 27. Et huius problematis ſolutio reduci poterat ad ſolutionem problematis primi. Cum enim eſſe debeat $y' = my$, erit $ly' = ly + lm$. Ponatur $ly = v$, vt ſit $ly' = v'$, fiatque $lm = \lambda$, oportebit eſſe $v' = v + \lambda$, vnde fit ob $v' = v + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$
$\lambda = \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4v}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$
et poſito $v = u + \lambda x$ habebitur:

$$0 = \frac{du}{1\,dx} + \frac{ddu}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3u}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

quae eſt aequatio, ad quam in primo problemate peruenimus. Quodſi ergo ponatur ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, atque Q denotet functionem parium dimenſionum ipſarum r et s erit $u = Q$, hincque $v = \lambda x + Q = ly = xlm + Q$. Numeris itaque ſumendis habetur $y = m^x e^Q$, vbi cum e^Q ſit quoque functio parium dimenſionum ipſarum r et s, ſi pro ea ſcribatur Q, erit vt ante inuenimus $y = m^x Q$.

Scholion.

§. 28 Quoniam aequationis Algebraicae:

$$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

omnes

omnes radices inuenimus, poterimus inde huius expreſſionis infinitae:

$$Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1.2(1-m)} + \frac{z^3}{1.2.3(1-m)} + \frac{z^4}{1.2.3.4(1-m)} + \text{etc.}$$

omnes factores exhibere. Poſito enim $lm = \lambda$ primus factor ſimplex erit $1 - \frac{z}{\lambda}$: et reliqui factores trinomiales in hac forma generali continebuntur:

$$1 + \frac{4kk\pi\pi z}{n(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)} - \frac{2\lambda z + zz}{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi}$$

quae transformatur in hanc:

$$1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)} - \frac{2\lambda z + zz}{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$$

ſi loco k ſucceſſiue ſubſtituantur numeri 1, 2, 3, 4, etc. et n eſt numerus infinite magnus, cuius ſemiſſis $\frac{n}{2}$ exhibet ipſum factorum numerum. Sit breuitatis gratia $\lambda\lambda + 4kk\pi\pi = \Phi$; eritque

$$Z = \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n\Phi} - \frac{2\lambda z}{\Phi} + \frac{zz}{\Phi}\right)$$

vbi poſterior factor locum teneat omnium infinitorum, qui ex variatione quantitatis Φ ex eo naſcuntur. Sumtis ergo logarithmis, iisque differentiatis, obtinebitur.

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{-1}{\lambda - z} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{\lambda\lambda}{n\Phi} - \frac{2\lambda}{\Phi} + \frac{2z}{\Phi}}{1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n\Phi} - \frac{2\lambda z}{\Phi} + \frac{zz}{\Phi}}.$$

Hisque terminis infinitas reſolutis:

$$\begin{array}{rllllll}
\frac{dZ}{Zdz} = & -\frac{1}{\lambda} & -\frac{z}{\lambda^2} & -\frac{zz}{\lambda^3} & -\frac{z^3}{\lambda^4} & -\frac{z^4}{\lambda^5} & -\frac{z^5}{\lambda^6} - \text{etc.} \\
 & +\frac{1}{n} & -\frac{4\lambda^2 z}{\Phi^2} & -\frac{8\lambda^3 zz}{\Phi^3} & -\frac{16\lambda^4 z^3}{\Phi^4} & -\frac{32\lambda^5 z^4}{\Phi^5} & -\frac{64\lambda^6 z^5}{\Phi^6} \\
 & -\frac{\lambda\lambda}{n\Phi} & +\frac{2z}{\Phi} & +\frac{6\lambda zz}{\Phi\Phi} & +\frac{16\lambda^2 z^3}{\Phi^3} & +\frac{40\lambda^3 z^4}{\Phi^4} & +\frac{96\lambda^4 z^5}{\Phi^5} \text{ etc.} \\
 & -\frac{2\lambda}{\Phi} & & & -\frac{2z^3}{\Phi^2} & -\frac{10\lambda z^4}{\Phi^3} & -\frac{36\lambda^2 z^5}{\Phi^4} \\
 & & & & & & +\frac{2z^5}{\Phi^5}
\end{array}$$

ponatur $\frac{dZ}{Z\,dz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ etc. et cum ſit $\Phi = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi$, vbi ſucceſſiue pro k omnes numeri 1, 2, 3, 4, etc. vsque ad $\frac{1}{2}n$ ſubſtituti concipiendi ſunt: eritque

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\left(\frac{1}{\lambda\lambda+4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.}\right)$$

Vel ſi breuitatis gratia ſtatuatur:

$$\frac{1}{\lambda\lambda+4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^2} + \text{etc.} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^3} + \text{etc.} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^4} + \text{etc.} = \mathfrak{D}$$

etc.

erit: $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$

$B = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda^2\mathfrak{B}$

$C = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3 C$

$D = -\frac{1}{\lambda^4} - 2\mathfrak{B} + 16\lambda^2\mathfrak{C} - 16\lambda^4\mathfrak{D}$

$E = -\frac{1}{\lambda^5} - 10\lambda\mathfrak{C} + 40\lambda^3\mathfrak{D} - 32\lambda^5\mathfrak{E}$

$F = -\frac{1}{\lambda^6} + 2\mathfrak{C} - 36\lambda^2\mathfrak{D} + 96\lambda^4\mathfrak{E} - 64\lambda^6\mathfrak{F}$

etc.

Cum iam ſit $Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1\cdot2(1-m)} + \frac{z^3}{1\cdot2\cdot3(1-m)} +$ etc. erit $Z = \frac{e^z - m}{1-m} = \frac{e^z - e^\lambda}{1 - e^\lambda}$; et $\frac{dZ}{dz} = \frac{e^z}{1-e^\lambda}$; vnde

$$\frac{dz}{Zdz} = \frac{e^z}{e^z - e^\lambda} = \frac{1}{1 - e^\lambda e^{-z}} = \frac{1}{1 - me^{-z}}, \text{ hincque}$$

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{1}{1 - m + mz - \frac{mzz}{1\cdot2} + \frac{mz^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{mz^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{etc.}}$$

Iam

Iam ob $\frac{dZ}{Zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$ fiet:

$$\begin{array}{rcccccc}
1 = & (1-m)A & +(1-m)Bz & +(1-m)Cz^2 & +(1-m)Dz^3 & +(1-m)Ez^4 & +\text{etc.} \\
 & & +mA & +mB & +mC & +mD & \\
 & & & -\frac{1}{2}mA & -\frac{1}{2}mB & +\frac{1}{2}mC & \\
 & & & & +\frac{1}{6}mA & +\frac{1}{6}mB & \\
 & & & & & -\frac{1}{24}mA &
\end{array}$$

vnde ſequentes prodibunt determinationes:

$$A = \frac{1}{1-m}$$

$$B = \frac{-mA}{1-m} = \frac{-m}{(1-m)^2}$$

$$C = \frac{-mB + \frac{1}{2}mA}{1-m} = \frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2}$$

$$D = \frac{-mC + \frac{1}{2}mB - \frac{1}{6}mA}{1-m} = \frac{-m^3}{(1-m)^4} - \frac{mm}{(1-m)^3} - \frac{m}{6(1-m)^2}$$

$$E = \frac{-mD + \frac{1}{2}mC - \frac{1}{6}mB + \frac{1}{24}mA}{1-m} = \frac{m^4}{(1-m)^5} + \frac{3m^3}{2(1-m)^4} + \frac{7mm}{12(1-m)^3} + \frac{m}{24(1-m)^2}$$

Sequentes ergo orientur ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ſummationes:

I. $\frac{1}{1-m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$; ſeu $\mathfrak{A} = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1-m)}$

II. $\frac{-m}{(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{2}{\lambda\lambda} - \frac{1}{\lambda(1-m)} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B}$

vnde $\mathfrak{B} = \frac{1}{8\lambda^3} - \frac{1}{2\lambda^4} - \frac{1}{4\lambda^3(1-m)} + \frac{m}{4\lambda\lambda(1-m)^2}$

III. $\frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3\mathfrak{C} = \frac{3}{4\lambda\lambda} - \frac{4}{\lambda^3} - \frac{3}{2\lambda^2(1-m)}$

$+ \frac{m}{2\lambda(1-m)^2} - 8\lambda^3\mathfrak{C}$.

Ergo $\mathfrak{C} = \frac{3}{32\lambda^5} - \frac{1}{2\lambda^6} - \frac{3}{16\lambda^5(1-m)} + \frac{3m}{16\lambda^4(1-m)^2} - \frac{m}{16\lambda^3(1-m)^2} - \frac{mm}{8\lambda^3(1-m)^3}$
Sicque ſequentes ſeri̇erum propoſitarum ſummae $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. inuenientur.

Coroll. 1.

§. 29. Cum igitur ſit $m = e^\lambda$ erit:

$$\frac{1}{\lambda\lambda + 4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 36\pi\pi} + \text{etc.} = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1-e^\lambda)}$$

ſit $\lambda = \frac{2\pi a}{b}$ erit:

$$\frac{bb}{4(aa+bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+4bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+9bb)\pi^2} + \text{etc.} = \frac{b}{8\pi a} - \frac{bb}{8\pi\pi aa} - \frac{b}{4\pi a(1-e^{2\pi a:b})}$$

ideoque per $\frac{4\pi\pi}{bb}$ multiplicando habebitur:

$$\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2ab} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b}-1)}$$

quam ſummam iam alibi ex alio fonte deductam exhibui.

Coroll. 2.

§. 30. Si ergo ſtatuatur $b = 1$, habetur haec ſumma

$$\frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{a(e^{2\pi a}-1)}$$

ac ſi ponatur praeterea $a = 0$, vt prodeat haec ſeries: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. huius ſumma, ob terminos in infinitum excreſcentes, ita ex formula deriuabitur: Concipiatur a infinite paruum, erit $e^{2\pi a} = 1 + 2\pi a + 2\pi\pi aa + \frac{4}{3}\pi^3 a^3$

ideoque ſumma erit $= \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{1}{2aa + 2\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi^2 a^4}$

=

$$= \frac{\pi a + \pi\pi aa + \frac{2}{3}\pi^3 a^3 - 1 - \pi a - \frac{2}{3}\pi^2 aa + 1}{2aa(1 + \pi a + \frac{2}{3}\pi\pi a^2)} = \frac{1}{6}\pi^2,$$ quae vt conſtat eſt ſumma ſeriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc.

Coroll. 3.

§. 31. Si in ſerie ante inuenta:

$$\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2ab} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b} - 1)}$$

quantitas a vt variabilis tractetur, et differentiatio inſtituatur prodibit ſumma ſeriei 𝔅, ſicque porro per continuam differentiationem ex ſerie 𝔄 reperientur ſummae ſerierum ſequentium 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, etc.

Coroll. 4.

§. 32. Summa huius ſeriei commodius ita exprimi poteſt $\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} +$ etc. $= \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi(e^{2\pi a:b} + 1)}{2ab(e^{2\pi a:b} - 1)} = \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi(e^{\pi a:b} + e^{-\pi a:b})}{2ab(e^{\pi a:b} - e^{-\pi a:b})}$. Ex qua forma facile colligitur valor ſeriei, ſi b ſit numerus imaginarius, ſit enim $b = \frac{c}{\sqrt{-1}}$ erit:

$$\frac{1}{aa-cc} + \frac{1}{aa-4cc} + \frac{1}{aa-9cc} + \text{etc.} = \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} + e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}})\sqrt{-1}}{2ac(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} - e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}})}$$

At eſt $e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} + e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}} = 2\,\text{coſ.}\,\frac{\pi a}{c}$ atque

$$e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} - e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}} = 2\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\frac{\pi a}{c}$$

vnde fit:

$$\frac{1}{aa-cc} + \frac{1}{aa-4cc} + \frac{1}{aa-9cc} + \text{etc.} = \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi\,\text{coſ.}\,\pi a:c}{2ac\,\text{ſin.}\,\pi a:c}$$

Coroll. 5.

§. 33. Cum ſit coſ. $\frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$: caſibus, quibus eſt $a = 2k + 1$ et $c = 2$ ſumma ſeriei eſt $= \frac{-1}{2aa} = \frac{1}{2(2k+1)^2}$ exiſtente k numero quocunque integro: Quare erit:

$$\frac{1}{(2k+1)^2-4} + \frac{1}{(2k+1)^2-16} + \frac{1}{(2k+1)^2-36} + \frac{1}{(2k+1)^2-64} + \text{etc.} = \frac{-1}{2(2k+1)^2}$$

quam [illegible] iam alibi demonſtraui. Si enim ſingulae fractiones in partes reſoluantur, oritur

$$\frac{-1}{2k+1} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-3} + \frac{1}{2k-5} + \frac{1}{2k-7} + \frac{1}{2k-9} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} + \frac{1}{2k+7} + \frac{1}{2k+9} - \text{etc.}$$

Coroll. 6.

§. 34. Tranſpoſito termino $\frac{-1}{2k+1}$ ad alteram partem biniſque terminis collectis orietur noua ſeries, cuius ſumma $= 0$. Erit ſcilicet ſingulis terminis per $4k$ diuiſis

$$0 = \frac{1}{4kk-1} + \frac{1}{4kk-9} + \frac{1}{4kk-25} + \frac{1}{4kk-49} + \frac{1}{4kk-81} + \text{etc.}$$

cuius veritas in ſingulis caſibus facile elucet.

Problema. IV.

§. 35. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus oritur, ſi antecedens per datum numerum m multiplicetur, atque ad productum datus numerus c addatur, cuiusque ſeriei terminus primus ſit pariter datus $= a$,

Solutio.

Termini ergo, qui indicibus integris reſpondent, ita ſe habebunt:

1

a;

1 2 3 4
a ; $ma+c$; $m^2a+mc+c$; $m^3a+m^2c+mc+c$; etc.
vnde ſi index quicunque x ſit numerus integrus, erit terminus conueniens $= m^{x-1}a + \frac{m^{x-1}-1}{m-1}c$: Sin autem x ſit numerus non integer, infinitae aliae formulae praeter hanc perinde ſatisfacient; ad quas inueniendas ſit y terminus indici x reſpondens, et y' ſequens ſeu indici $x+1$ competens: erit $y' = my + c$: vnde fiet:

$$my + c = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Ponatur $y = v - \frac{c}{m-1}$; eritque:

$$mv = v + \frac{dv}{1dx} + \frac{ddv}{1.2dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

quae aequatio cum congruat cum ea, quam in problemate praecedente inuenimus; ſi ponatur ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$ atque Q ſumatur pro functione quacunque parium dimenſionum ipſarum r et s, erit $v = m^x Q$; ideoque $y = m^x Q - \frac{c}{m-1}$. Ponatur $x = 1$, quo caſu fit $r = 0$ et $s = -1$, abeatque Q in C, oportet eſſe $a = mC - \frac{c}{m-1}$; ideoque erit $C = \frac{a}{m} + \frac{c}{m(m-1)}$. Quare ſi pro Q ſumatur quantitas conſtans C ipſa, erit $y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1}-1)c}{m-1}$ pro caſu ſimpliciſſimo. Atque ſi P ſit functio parium dimenſionum ipſarum r et s talis quae euaneſcat poſito $x = 1$, poni poterit $Q = C + P$ eritque termini generalis quaeſiti forma latiſſime patens $y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1}-1)c}{m-1} + m^x P$. Q. E. I.

Proble-

Problema V.

§. 36. Inuenire terminum generalem ſerierum recurrentium ſecundi ordinis, in quibus quilibet terminus aequatur aggregato binorum terminorum antecedentium per quoscunque numeros multiplicatorum:

Solutio.

Sit terminus indici x reſpondens $= y$;
terminus indici $x-1$ reſpondens $= {}'y$
terminus indici $x-2$ reſpondens $= {}''y$

haecque propoſita ſit lex ſeriei recurrentis, vt ſit:

$$y = \alpha\,'y + \beta\,''y$$

Quia igitur eſt

$$'y = y - \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2dx^2} - \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} - \text{etc.}$$

$$''y = y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{4ddy}{1\cdot 2dx^2} - \frac{8d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{16d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} - \text{etc.}$$

erit his formulis ſubſtitutis:

$$y = \begin{cases} +\alpha\left(y - \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2dx^2} - \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} - \text{etc.}\right) \\ +\beta\left(y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{4ddy}{1\cdot 2dx^2} - \frac{8d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{16d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} - \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Ad quam aequationem reſoluendam ponatur ſecundum praeceptum generale 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$ etc. fietque

$$1 = \begin{cases} +\alpha\left(1 - \frac{z}{1} + \frac{zz}{1\cdot 2} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc.}\right) \\ +\beta\left(1 - \frac{2z}{1} + \frac{4z^2}{1\cdot 2} - \frac{8z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{16z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc.}\right) \end{cases}$$

quae aequatio ad hanc formam finitam reducitur, $1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z}$: cuius factores inueſtigare oportet. Poſito ergo $e^{+z} = u$ ac reſoluatur haec aequatio $uu = \alpha u + \beta$: cuius vel ambae radices ſunt reales, vel ambae imaginariae, vel denique ambae inter ſe aequales. Hosque tres caſus ſeorſim euolue oportet.

I. Sint

I. Sint igitur primo ambae radices reales et inaequales inter ſe, ſeu ſit $uu - \alpha u - \beta = (u - A)(u - B)$: hincque pro u ponendo e^z habebimus binos factores generales $(e^z - A)$ et $(e^z - B)$. Vidimus autem ſupra formulam $e^z - m$ dediſſe integrale hoc:

$$y = m^x \left(\begin{array}{l} C + \alpha \text{ſin.}\, 2\pi x + \beta \text{ſin.}\, 4\pi x + \gamma \text{ſin.}\, 6\pi x \\ + \mathfrak{A} \text{coſ.}\, 2\pi x + \mathfrak{B} \text{coſ.}\, 4\pi x + \mathfrak{C} \text{coſ.}\, 6\pi x \end{array} + \text{etc.} \right)$$

Ergo ambo factores $e^z - A$ et $e^z - B$ dabunt coniunctim hunc valorem pro termino generali y:

$$y = \begin{array}{l} + A^x \left(\begin{array}{l} C + \alpha \text{ſin.}\, 2\pi x + \beta \text{ſin.}\, 4\pi x + \gamma \text{ſin.}\, 6\pi x + \text{etc} \\ + \mathfrak{A} \text{coſ.}\, 2\pi x + \mathfrak{B} \text{coſ.}\, 4\pi x + \mathfrak{C} \text{coſ.}\, 6\pi x + \text{etc.} \end{array} \right) \\ + B^x \left(\begin{array}{l} C' + \alpha' \text{ſin.}\, 2\pi x + \beta' \text{ſin.}\, 4\pi x + \gamma' \text{ſin.}\, 6\pi x + \text{etc.} \\ + \mathfrak{A}' \text{coſ.}\, 2\pi x + \mathfrak{B}' \text{coſ.}\, 4\pi x + \mathfrak{C}' \text{coſ.}\, 6\pi x + \text{etc.} \end{array} \right) \end{array}$$

Vel ponatur $\text{ſin.}\, \pi x = r$ et $\text{coſ.}\, \pi x = s$, ſintque P et Q functiones quaecunque parium dimenſionum ipſarum r et s, eritque ſi fuerit $uu - \alpha u - \beta = (u - A)(u - B)$, ſeu ſi ſint A et B radices aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$; hoc inquam caſu erit:

$$y = A^x P + B^x Q.$$

II. Si ambae radices fuerint imaginariae, tum quidem eadem formula iam inuenta vſum habere poterit, quoniam quouis caſu imaginaria ſe mutuo deſtruent: interim tamen formula pro y exhiberi poteſt ab imaginariis libera. Hoc enim caſu aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$ eiusmodi induet formam $uu - 2fu \,\text{coſ.}\, \omega + ff = 0$, cuius radices ſunt $u = f \,\text{coſ.}\, \omega \pm f\sqrt{-1}.\, \text{ſin.}\, \omega$, ita vt ſit $A = f \,\text{coſ.}\, \omega + f\sqrt{-1}.\, \text{ſin.}\, \omega$ et $B = f \,\text{coſ.}\, \omega - f\sqrt{-1}.\, \text{ſin.}\, \omega$. Hinc autem erit $A^x = f^x \,\text{coſ.}\, \omega x + f^x \sqrt{-1}.\, \text{ſin.}\, \omega x$, atque

 $B^x =$

$B^x = f^x \operatorname{cof.} \omega x - f^x \sqrt{-1} . \operatorname{ſin.} \omega x$. Hi igitur valores, ſi loco A^x et B^x ſubſtituantur, fiet $y = (P + Q) f^x \operatorname{cof.} \omega x + (P - Q) \sqrt{-1} . f^x \operatorname{ſin.} \omega x$. Quia iam P et Q ſunt functiones arbitrariae ipſarum r et s, dummodo dimenſiones habeant pares: loco $P + Q$, ſcribatur P, et loco $(P - Q) \sqrt{-1}$, ponatur Q eritque ex aequatione $uu - \alpha u - \beta = uu - 2 f u \operatorname{cof.} \omega + ff = 0$, terminus generalis quaeſitus:

$$y = f^x P \operatorname{cof.} \omega x + f^x Q \operatorname{ſin.} \omega x.$$

III. Si ambae aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$ radices A et B fuerint aequales, puta $A = B = m$, aequatio habebitur $(e^z - m)^2 = 0$. Ponatur vt in §. XXIII; $m = e^\lambda$, erit formulae $(e^z - e^\lambda)^2$ primus factor quadratus $= (z - \lambda)^2$: ex quo oritur pars integralis $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x) e^{\lambda x} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x) m^x = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x) A^x$. Reliqui factores omnes erunt pariter quadrati, et continebuntur in hac forma generali:

$$(\lambda\lambda + 4 kk \pi\pi - 2 \lambda z + zz)^2$$

ex quo oritur ſecundum praecepta a me tradita pars integralis:

$$A^x (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x) \operatorname{ſin.} 2 k \pi x + A^x (\mathfrak{C} + \mathfrak{D} x) \operatorname{cof.} 2 k \pi x.$$

Quibus colligendis ſequitur, ſi fuerit $uu - \alpha u - \beta = (u - A)^2 = uu - 2 A u + AA$, fore terminum generalem quaeſitum: $y =$

$$A^x \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} x + (\mathfrak{C} + \mathfrak{D} x) \operatorname{ſin.} 2 \pi x + (\mathfrak{G} + \mathfrak{H} x) \operatorname{ſin} 4 \pi x + \text{etc.} \\ \qquad + (\mathfrak{E} + \mathfrak{F} x) \operatorname{cof.} 2 \pi x + (\mathfrak{J} + \mathfrak{K} x) \operatorname{cof.} 4 \pi x + \text{etc.} \end{array} \right)$$

Ponatur iterum $\operatorname{ſin.} \pi x = r$ et $\operatorname{cof.} \pi x = s$, ſintque P et Q functiones quaecunque pares ipſarum r et s, atque terminus generalis ita exprimi poterit, vt ſit $y = A^x (P + Q x)$. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. 1.

§. 37. Si ergo in ſerie recurrente quilibet terminus y ita per binos praecedentes $'y$ et $''y$ determinetur, vt ſit $y = \alpha\, 'y + \beta\, ''y$, ſeu ſi ſecundum Moioraeum fuerit $+\alpha$, $+\beta$ ſcala relationis; acſi x fuerit index termini y: erit y functio maxime indeterminata ipſius x: cum innumerabiles formulae exhiberi queant, quae valores ſatisfacientes pro y praebeant.

Coroll. 2.

§. 38. Ad has autem omnes expreſſiones pro y inueniendas, formetur ex ſcala relationis $+\alpha$, $+\beta$ haec aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$: ex cuius reſolutione forma termini generalis y ſequenti modo reperietur.

Coroll. 3.

§. 39. Sint aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$ radices A et B, ita vt ſit $A = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)}$ et $B = \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)}$, ſumanturque, poſito ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, functiones quaecunque pares ipſarum r et s, quae ſint P et Q, erit $y = A^x P + B^x Q = (\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)})^x P + (\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)})^x Q$.

Coroll. 4.

§. 40. Sin autem aequationis $uu = \alpha u + \beta$ ambae radices fuerint aequales, illa formula vſu caret, ob $\beta + \frac{1}{4}\alpha\alpha = 0$. Hoc autem caſu, cum vtraque radix futura ſit $\frac{1}{2}\alpha$, ſi ponatur $\frac{1}{2}\alpha = A$, erit terminus generalis $y = A^x (P + Qx)$.

Coroll. 5.

§. 41. Sin autem ſit $\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta$ quantitas negatiua, partes ante inuentae erunt imaginariae. Ad formam ergo realem inueniendam comparetur aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$ cum hac $uu - 2fu$ coſ. ω, $+ ff = 0$, erit $f = \sqrt{-\beta}$, et $\alpha = 2\sqrt{-\beta}$, coſ ω, ſeu coſ. $\omega = \frac{\alpha}{2\sqrt{-\beta}}$ et ſin. $\omega = \frac{\sqrt{(-4\beta - \alpha\alpha)}}{2\sqrt{-\beta}} = \sqrt{(1 + \frac{\alpha\alpha}{4\beta})}$, vnde angulus ω inuenietur, ex quo erit $y = f^x$ (P coſ. ωx + Q ſin. ωx)

Coroll. 6.

§. 42. Si pro P et Q quantitates conſtantes aſſumantur, prodit eadem termini generalis forma, quae vulgo exhiberi ac pro ſola, quae ſatisfaciat, haberi ſole. Qualibet autem ſerie determinata propoſita, iſtas binas quantitates conſtantes ex duobus terminis primis, qui dati ſumuntur, definiri oportet. In genere autem, cum duae ingrediantur functiones arbitrariae P et Q, quae quoties x eſt numerus integer, eosdem valores conſtantes inducent, patet duos ſeriei terminos indicibus integris reſpondentes, pro lubitu aſſumi poſſe.

Scholion.

§. 43. Methodus haec inueniendi term nos generales ſerierum recurrentium ideo potiſſimum eſt notatu digna, quod non ſolum omnes poſſibiles formas exhibeat, ſed etiam quod a priori procedat, atque ex ſolis principiis analyticis negotium conficiat, cum alii, qui has ſeries tractauerunt, omnes per viam indirectam ad formam illam terminorum generalium ſpecialem peruenerint. Haec enim

enim eſt praecipua proprietas, et quaſi criterium methodi directae, vt non ſolum ex ipſis cuiusque rei principiis eius affectiones eruat, ſed etiam omnes determinationis modos ſimul complectatur. Methodi autem indirectae, etſi ſaepe concinnas et elegantes problematum ſolutiones ſuppeditant, tamen rariſſime naturam quaeſtionis, quae tractatur, exhauriunt. Cuius diſcriminis eximium exemplum in problemate antecedente ſpectatur; luculentius autem in problemate ſequente occurret, vbi in genere omnium ſerierum recurrentium termini generales inueſtigabuntur.

Problema VI.

§. 44. Inuenire terminum generalem ſerierum recurrentium cuiuscunque ordinis, quarum quilibet terminus aequatur aggregato aliquot terminorum antecedentium per numeros quoscunque multiplicatorum.

Solutio.

Sit terminus indici x reſpondens $= y$, termini autem antecedentes, qui indicibus $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$, etc. conueniunt, deſignentur per $'y$, $''y$, $'''y$, ${}^{\mathrm{IV}}y$, etc: propoſitaque ſit haec ſeriei lex, vt habeatur vbique:

$$y = \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + \delta\,{}^{\mathrm{IV}}y + \text{etc.}$$

Cum iam ſit ex natura differentialium:

$$'y = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \text{etc.}$$

$$''y = y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{2^2ddy}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{2^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \text{etc.}$$

$$'''y = y - \frac{3dy}{1dx} + \frac{3^2ddy}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{3^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \text{etc.}$$

etc.

Si hi valores ibi ſubſtituantur, prodibit aequatio, in cuius ſingulis terminis vnica variabilis y dimenſio occurrit, alterius vero variabilis x, nonniſi differentiale dx, quod conſtans ponitur, ingreditur. Quare ſi vbique 1 loco y, z loco $\frac{dy}{dx}$, et generatim z^m loco $\frac{d^m y}{dx^m}$ ſubſtituatur, emerget reductione facta haec aequatio:

$$1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z} + \gamma e^{-3z} + \delta e^{-4z} + \text{etc.}$$

Fiat nunc $e^z = u$, atque ſublatis fractionibus prodibit huiusmodi aequatio Algebraica:

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} \delta u^{n-4} + \text{etc.}$$

quae tot erit dimenſionum, quot termini antecedentes ad termini y determinationem requiruntur; ſeu quoti ordinis fuerit ipſa ſeries recurrens. Iam forma termini generalis y ex radicibus huius aequationis, ſeu ex factoribus huius formulae:

$$u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \delta u^{n-4} - \text{etc.} = U$$

ſimili modo colligetur, quo in ſolutionibus problematum hactenus propoſitorum ſumus vſi: ſcilicet ſi ſit ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, ac P, Q, R, S, T, etc. denotent functiones quaſcunque parium dimenſionum ipſarum r et s. Deinde formulae U inueſtigentur omnes factores reales tam ſimplices quam trinomiales, et, ſi qui eorum fuerint aequales, ii coniunctim per poteſtates exprimantur. Singuli autem factores iſti totidem partes termini generalis y praebebunt, quae partes ope ſequentium regularum formabuntur:

I. Si

I. Si factor ſit $u - \mathrm{A}$ erit pars integralis

$$y = \mathrm{A}^x \mathrm{P}$$

II. Si factor ſit $(u-\mathrm{A})^2$ erit pars integralis

$$y = \mathrm{A}^x(\mathrm{P} + \mathrm{Q}x)$$

III. Si factor ſit $(u-\mathrm{A})^3$ erit pars integralis

$$y = \mathrm{A}^x(\mathrm{P} + \mathrm{Q}x + \mathrm{R}x^2)$$

IV. Si factor ſit $(u-\mathrm{A})^4$ erit pars integralis

$$y = \mathrm{A}^x(\mathrm{P} + \mathrm{Q}x + \mathrm{R}xx + \mathrm{S}x^3)$$

etc.

1. Si factor ſit $uu - 2\mathrm{A}u\,\text{coſ.}\,\omega + \mathrm{AA}$ erit

$$y = \mathrm{A}^x(\mathrm{P}\,\text{coſ.}\,\omega x + \mathrm{Q}\,\text{ſin.}\,\omega x)$$

2. Si factor ſit $(uu - 2\mathrm{A}u\,\text{coſ.}\,\omega + \mathrm{AA})^2$ erit

$$y = \mathrm{A}^x(\mathrm{P} + \mathrm{Q}x)\,\text{coſ.}\,\omega x + \mathrm{A}^x(\mathrm{R} + \mathrm{S}x)\,\text{ſin.}\,\omega x$$

3. Si factor ſit $(uu - 2\mathrm{A}u\,\text{coſ.}\,\omega + \mathrm{AA})^3$ erit

$$y = \begin{matrix} \mathrm{A}^x(\mathrm{P} + \mathrm{Q}x + \mathrm{R}xx)\,\text{coſ.}\,\omega x \\ + \mathrm{A}^x(\mathrm{S} + \mathrm{T}x + \mathrm{V}xx)\,\text{ſin.}\,\omega x \end{matrix}$$

etc.

Quodſi ergo pro ſingulis formulae U factoribus hinc partes integralis quaerantur, eaeque in vnam ſummam coniiciantur, habebitur valor completus pro termino generali y quaeſito. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 45. Hoc ergo modo obtinetur integrale completum ſequentis aequationis differentialis infinitae:

$y =$

$$y = y(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.})$$
$$- \frac{dy}{1dx}(\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{etc.})$$
$$+ \frac{ddy}{1.2dx^2}(\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.})$$
$$- \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}(\alpha + 2^3\beta + 3^3\gamma + 4^3\delta + \text{etc.})$$
$$+ \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4}(\alpha + 2^4\beta + 3^4\gamma + 4^4\delta + \text{etc.})$$
etc.

ſeu valor ipſius y exprimetur per functionem ipſius x.

Coroll. 2.

§. 46. Omnis ergo difficultas reducitur ad reſolutionem aequationis Algebraicae:

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + \delta u^{n-4} + \text{etc.}$$

Eius enim radicibus ſeu factoribus inuentis facile eſt ope regularum ante traditarum valorem ipſius y determinare.

Coroll. 3.

§. 47. Quoniam per integrationem tot quantitates arbitrariae P, Q, R, S, etc. inuehuntur, quot vnitates continet exponens n, ſeu quot termini antecedentium in determinationem ſequentis ingrediuntur: manifeſtum eſt totidem terminos pro lubitu aſſumi poſſe, ex quibus reliqui omnes, quorum indices ſunt integri determinentur. Hoc tamen non obſtat, quo minus termini indicum non integrorum maneant maxime indeterminati, vti in praecedentibus problematis iam eſt notatum.

Problema VII.

§. 48. Si ſeriei quilibet terminus aequetur quantitati cuipiam conſtanti c, vna cum aggregato aliquot terminorum

rum antecedentium per datos numeros multiplicatorum, (vt in problemate praecedente): inuenire huius ſeriei terminum generalem.

Solutio.

Poſito vt ante termino indici indeterminato x reſpondente $= y$, ſint antecedentes indicibus $x-1$, $x-2$, $x-3$, etc. reſpondentes $'y$, $''y$, $'''y$ etc. atque propoſita ſit haec lex progreſſionis

$$y = c + \alpha\, 'y + \beta\, ''y + \gamma\, '''y + \delta\, ^{\text{IV}}y + \text{etc.}$$

ſubſtitutis ergo pro $'y$, $''y$, $'''y$, $^{\text{IV}}y$, etc. valoribus ſupra exhibitis erit:

$$\begin{aligned} y = c &+ y\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}) \\ &- \tfrac{dy}{1 \cdot dx}\,(\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{etc.}) \\ &+ \tfrac{ddy}{1 \cdot 2\, dx^2}(\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.}) \\ &- \tfrac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3}(\alpha + 2^3\beta + 3^3\gamma + 4^3\delta + \text{etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ponatur iam ad terminum conſtantem c ex aequatione tollendum $y = v + g$, fiatque: $g = c + g\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. ideoque $g = \frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$ Quo facto ob $dy = dv$, $ddy = ddv$ etc. habebitur aequatio haec:

$$\begin{aligned} v = \; & v\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}) \\ &- \tfrac{dv}{1\, dx}\,(\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{etc.}) \\ &+ \tfrac{ddv}{1 \cdot 2\, dx^2}(\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Quae aequatio cum ſimilis ſit ei, quam in problemate praecedente

cedente reſoluimus, valor ipſius v per regulas ibi datas inuenietur. Quo inuento habebitur terminus generalis quaeſitus

$$y = v + \frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$$

ex quo natura ſeriei propoſitae innoteſcet. Q E I.

Coroll. 1.

§. 49. Quantitas igitur conſtans c, quae ad formulam $\alpha' y + \beta'' y + \gamma''' y$ + etc. accedit, terminum generalem y aliter non afficit, niſi quod ipſi numerum conſtantem adiiciat. Quaeratur ergo terminus generalis pro ſerie recurrente pura cuius ſcala relationis ſit: α, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, etc. ad cumque addatur numerus $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\text{etc.}}$

Coroll. 2.

§. 50. Haec autem quantitas conſtans adiicienda $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\text{etc.}}$ euadit infinita ideoque incerta, ſi denominator euaneſcit, ſeu ſi $1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.} = 0$. Hoc autem caſu aequatio $u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \text{etc.} = 0$ radicem habebit $u - 1 = 0$, vnde naſcitur integralis pars $y = P$; quae ne omnes termini fiant infiniti, quantitas P ita debet eſſe infinita, vt ea cum illa conſtante infinita praebeat valorem finitum, qui erit $= P + Qx$.

Scholion 1.

§. 51. Quod quo clarius appareat, obſeruandum eſt huiusmodi ſeries, quales hic ſumus contemplati, ſemper reduci poſſe ad ſeries recurrentes puras vno gradu altiores. Si enim ſit

$y =$

$$y = c + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + {}^{\mathrm{IV}}y,$$

erit $'y = c + \alpha''y + \beta'''y + \gamma\,{}^{\mathrm{IV}}y + {}^{\mathrm{V}}y$,

quarum differentia dat:

$$y = (\alpha + 1)'y + (\beta - \alpha)''y + (\gamma - \beta)'''y + (\delta - \gamma)^{\mathrm{IV}}y - \delta\,{}^{\mathrm{V}}y,$$

quae eſt lex pro ſerie recurrente pura: cuius terminus generalis formabitur ex reſolutione huius aequationis:

$$u^{n+1} - (\alpha + 1)u^{n} - (\beta - \alpha)u^{n-1} - (\gamma - \beta)u^{n-2} - \text{etc.} = 0.$$

Huius autem factor vnus iam conſtat, ſcilicet $u - 1$ cum ſit

$$(u - 1)(u^{n} - \alpha\,u^{n-1} - \beta\,u^{n-2} - \gamma\,u^{n-3} - \text{etc.}) = 0$$

Factor autem $u - 1$ dat partem integralis 1^{x} P tum ſolum, quando non ſimul factor eſt alterius formae $u^{n} - \alpha u^{n-1}$-etc. ſin autem haec quoque factorem habeat $u - 1$ eiusue poteſtatem, iſtius exponens vnitate augeri, indeque debita integralis pars inueſtigari debet. Inuento autem hac ratione termino generali y, is, cum in eo quantitas c non inſit, nimis erit generalis; ad caſum ergo propoſitum reſtringi debebit. Ex valore ſcilicet ipſius y eruantur valores terminorum praecedentium $'y$, $''y$, $'''y$, etc. loco x ponendo $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, etc. vbi notandum eſt, functiones P, Q, R, etc. eosdem valores retinere, nullamque inde mutationem pati. Deinde hi valores ſubſtituantur in aequatione:

$$y = c + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + \delta\,{}^{\mathrm{IV}}y + \text{etc.}$$

atque hoc pacto vna functionum illarum P, Q, R, etc. determinabitur. Sic ſi propoſita ſit haec ſeriei lex:

$$y = c + 3\,'y - 2\,''y$$

hinc naſcetur aequatio $(u - 1)(u^{2} - 3u + 2) = 0$, cuius

factores ſunt $(u-1)^2(u-2)=0$; ex quibus colligitur terminus generalis:

$$y = P + Qx + 2^x R \text{, erit ergo}$$

$$y = P + Qx - Q + 2^{x-1} R \text{, et}$$

$$'y = P + Qx - 2Q + 2^{x-2} R \text{,}$$

qui ſubſtituti hanc dabunt aequalitatem:

$$P + Qx + 4 \cdot 2^{x-2} R = c + P + Qx + Q + 4 \cdot 2^{x-2} R \text{,}$$

vnde reperitur $Q = -c$: ſicque terminus generalis propoſitae legi conueniens erit $y = P - cx + 2^x R$, vbi pro P et R functiones quascunque parium dimenſionum ipſarum r et s aſſumi poſſunt.

Scholion 2.

§. 52. Quoniam igitur methodum vniuerſalem tradidimus inueniendi terminos generales ſerierum, quarum terminus quisque per praecedentes determinatur, ſiquidem terminorum antecedentium nullae poteſtates occurrant; eandem hanc methodum accommodemus ad ſeries, quarum quisque terminus, non ſolum ex praecedentibus, ſed etiam ex ipſo indice, determinatur; in quo tertium formationis ſerierum genus conſtituimus. Quodſi vero terminorum praecedentium quadrata, altioresue poteſtates in determinationem ſequentis ingrediantur, vt ſi fuerit $y' = yy + ay$, tum quidem aequatio differentialis infinita, qua terminus generalis inuenitur, facile exhibetur, quae hoc caſu erit:

$$yy + ay = y + \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3\,dx^3} + \text{etc.}$$

ſed quia artificium nondum conſtat huiusmodi aequationes reſoluendi, tractationem huius generis ſerierum hic praetermittere cogimur.

Proble-

Problema. VIII.

§. 53. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus indici x reſpondens, aequatur praecedentis multiplo cuicunque vna cum multiplo ipſius indicis, et quantitate quapiam conſtante.

Solutio.

Sit y terminus indici x reſpondens, et y' denotet terminum ſequentem, ſitque haec ſeriei lex propoſita.

$$y' = my + a + bx,$$

ex qua valorem ipſius y definiri oporteat. Si ergo pro y' valorem ſuum ſubſtituamus, habebimus hanc aequationem:

$$a + bx + my = y + \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$$

Huiusmodi autem aequationes etſi generaliter reſoluere docui, tamen expediet hanc aequationem per ſubſtitutionem in aliam reſoluere, in qua omnes termini vnam ipſius y complectantur dimenſionem. Ponatur ergo

$y = A + Bx + v$, erit $dy = B\,dx + dv$; $ddy = ddv$ etc.

fietque:

$$a + bx + mv = A + Bx + v + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^3} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$$
$$+ mA + mBx \quad + B$$

Iam fiat $A + B = a + mA$ et $B = b + mB$; reperieturque $B = \frac{-b}{m-1}$; et $A = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a}{m-1}$. Reſtabit ergo haec aequatio:

$$mv = v + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$$

quae cum reducatur ad $e^z - m = u - m = 0$: erit:

$v = m^x P$, ideoque terminus generalis quaeſitus,

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a-bx}{m-1} + m^x P.$$

K 3 Vni-

Vnicus caſus hic excipitur quo $m = 1$, ob denominatorem $m - 1$ euaneſcentem. Cum enim hoc caſu habeatur:

$$a + bx = \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$$

ad terminum bx tollendum huiusmodi valor pro y accipi debet $y = A + Bx + Cxx + v$: vnde fit $\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + \frac{dv}{dx}$ et $\frac{ddy}{dx^2} = 2C + \frac{ddv}{dx^2}$: ſicque habebitur:

$$a + bx = B + 2Cx + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$$
$$+ C$$

Fiat ergo $C = \frac{1}{2}b$, et $B = a - \frac{1}{2}b$; eritque $v = P$, et terminus generalis $y = A + (a - \frac{1}{2}b)x + \frac{1}{2}bxx + P$; ſeu cum A in functione P comprehendi poſſit, erit: $y = (a - \frac{1}{2}b)x + \frac{1}{2}bxx + P$. Q. E. I.

Scholion.

§. 54. Huiusmodi autem ſeries reuocari poſſunt ad legem recurrentium ſimplicium. Cum enim ſit

$y' = a + bx + my$ erit
$y'' = a + b(x+1) + my'$ vnde ſubtrahendo
$y'' - y' = b + my' - my$ ſimili modo erit
$y''' - y'' = b + my'' - my'$ denuoque ſubtrahendo:
$y''' - 2y'' + y' = my'' - 2my' + my$ ſeu
$y''' = (m+2)y'' - (2m+1)y' + my$ ſiue pro terminis antecedentibus
$^{IV}y = (m+2)'y - (2m+1)''y + m'''y$.

Hinc ergo ſecundum §. LI. formabitur aequatio:
$u^3 - (m+2)u^2 + (2m+1)u - m = 0$ quae habet factores: $(u-1)^2(u-m) = 0$. ex quibus oritur terminus generalis: $y = P + Qx + m^xR$. Iam vt haec forma nimis late patens ad caſum propoſitum $y' = a + bx + my$ accommodetur, ob

$y' =$

$y' = P + Qx + Q + m.m^x R$, fiet

$P + Q + Qx + m.m^x R = a + bx + mP + mQx + m.m^x R$

ideoque $P + Q = a + mP$, et $Q = b + mQ$, vnde inuenitur $Q = \frac{-b}{m-1}$ ct $P = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a}{m-1}$, ita vt ſit terminus generalis vt ante eſt inuentus:

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a-bx}{m-1} + m^x R.$$

Sin autem $m = 1$, ſtatim patet aequationis $(u-1)^2(u-m) = 0$, tres factores fore aequales, fierique $(u-1)^3 = 0$, vnde fit terminus generalis $y = P + Qx + Rxx$, et propterea:

$$\begin{array}{lll} y' = P + Qx + Rxx & = & P + Qx + Rxx \\ \quad + Q + 2Rx & & a + bx \\ \quad + R & & \end{array}$$

Ergo prodit: $R = \frac{1}{2}b$ et $Q = a - \frac{1}{2}b$, ita vt ſit terminus generalis $y = P + (a - \frac{1}{2}b)x + \frac{1}{2}bxx$, vt ante. Simili modo apparet, ſi lex progreſſionis in genere ſit:

$$y = X + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + \delta\,^{IV}y + \text{etc.}$$

atque X ſit functio ipſius x rationalis integra, veluti $X = a + bx + cxx + dx^3 +$ etc. per continuam ſubtractionem tandem perueniri ad legem, qua ſinguli termini per ſolos antecedentes determinentur; ſicque ſeriem ſemper fore recurrentem, cuius terminus generalis per praecepta ante data definiri queat. Hic autem terminus nimis late patebit; hancque ob rem quaerendis valoribus terminorum $'y$, $''y$, $'''y$ etc. ad legem propoſitam accommodari debebit, quo pacto tot ſemper functiones P, Q, R, etc. determinabuntur, quot litterae a, b. c, d, etc. fuerint per ſubtractionem eliminatae. Cum igitur huiusmodi

modi ſeries nihil amplius habeant difficultatis, alias conſideremus, in quibus X non ſit functio, vel rationalis, vel integra ipſius x.

Problema. IX.

§. 55. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus aequetur praecedenti vna cum functione quacunque ipſius indicis.

Solutio.

Sit terminus indici x reſpondens $= y$, eiusque antecedens

$$'y = y - \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} - \text{etc.}$$

Lex autem progreſſionis ſit $y = {}'y + X$, vnde fiet

$$X = \frac{dy}{1\,dx} - \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} - \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

quae aequatio reſoluetur ope regularum, quas ante aliquod tempus tradidi. Scilicet ponendo z^n pro $\frac{d^ny}{dx^n}$ formetur haec expreſſio:

$$Z = z - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} = 1 - e^{-z}$$

cuius quaerantur omnes factores, qui erunt primo z; reliqui in hac forma generali continentur: $zz + 4kk\pi\pi$. Ex factore $z - 0$ orietur autem haec pars integralis:

$$y = \int X\,dx + \text{etc.}$$

Ex factore autem $zz + 4kk\pi\pi$ ſi comparetur cum formula $zz - 2kz\,\text{coſ.}\,\Phi + kk$, fiet $k = 2k\pi$, et $\text{coſ.}\,\Phi = 0$, vnde $\Phi = 90°$, ideoque litterae $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ita determinabuntur ob $A = 0$; $B = 1$, $C = \frac{1}{1.2}$; $D = \frac{1}{1.2.3}$ etc

$\mathfrak{M} =$

$$\mathfrak{M} = 1 - \frac{4k^2\pi^2}{1.2} + \frac{16k^4\pi^4}{1.2.3.4} - \frac{64k^6\pi^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{N} = -\frac{2k\pi}{1} + \frac{8k^3\pi^3}{1.2.3} - \frac{32k^5\pi^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

ita vt ſit $\mathfrak{M} = \text{coſ.}\, 2k\pi$, et $\mathfrak{N} = -\,\text{ſin.}\, 2k\pi$. His valoribus inuentis, erit pars integralis ex factore $zz + 4kk\pi\pi$ oriunda:

$$y = 2\begin{cases}(\text{coſ.}\, 2k\pi\, \text{coſ.}\, 2k\pi x - \text{ſin.}\, 2k\pi.\, \text{ſin.}\, 2k\pi x) \int X dx\, \text{coſ.}\, 2k\pi x\\(\text{coſ.}\, 2k\pi.\, \text{ſin.}\, 2k\pi x + \text{ſin.}\, 2k\pi.\, \text{coſ.}\, 2k\pi x) \int X dx\, \text{ſin.}\, 2k\pi x\end{cases}$$

at eſt, ſi $2k = 0$, coſ. $2k\pi = 1$, vnde erit:

$$v = 2\, \text{coſ.}\, 2k\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 2k\pi x + 2\, \text{ſin.}\, 2k\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 2k\pi x.$$

Quod ſi iam omnes hi valores, ex variabilitate numeri k oriundi, in vnam ſummam colligantur, prodibit terminus generalis quaeſitus:

$$y = \int X dx \begin{matrix} +2\,\text{coſ.}\, 2\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 2\pi x + 2\,\text{coſ}\, 4\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 4\pi x + 2\,\text{coſ.}\, 6\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 6\pi x \\ +2\,\text{ſin.}\, 2\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 2\pi x + 2\,\text{ſin.}\, 4\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 4\pi x + 2\,\text{ſin.}\, 6\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 6\pi x \end{matrix}\ \text{etc.}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 56. Quia eſt $y = {}'y + X$, manifeſtum eſt, y exprimere terminum ſummatorium ſeriei, cuius terminus generalis ſit $= X$. Si enim ſumma omnium terminorum a primo vsque ad hunc X, cuius index eſt $= x$, ponatur $= y$, erit ſumma omnium praeter vltimum $= {}'y$, ideoque $y = {}'y + X$.

Coroll. 2.

§. 57. Expreſſio ergo inuenta y, ſeu terminus generalis ſeriei propoſitae, ſimul eſt terminus ſummatorius ſeriei, cuius terminus generalis eſt $= X$; ſicque nouam adepti ſumus expreſſio-

 nem

nem pro ſumma cuiusque ſeriei, cuius terminus generalis datur; quae autem ob multitudinem integralium infinitam rariſſime vſum aliquem praeſtabit.

Scholion.

§. 58. Si praeter functionem quamcunque indicis x, non ſolum terminus proxime praecedens, ſed plures praecedentium, ad formationem termini ſequentis adhibeantur, ſimili modo peruenietur ad reſolutionem aequationis differentialis infinitae, quae ope *methodi a me propoſitae* tractari poterit. Non ſolum igitur ſeries, quarum lex formationis ad genus pertinet ſecundum, methodo hic expoſita ad calculum reuocari, earumque termini generales inueniri poſſunt, ſed etiam ad genus tertium aeque patet, iſtarumque ſerierum veram indolem clarius ob oculos ponit.

Problema X.

§. 59. Inuenire terminum generalem ſeriei; cuius quilibet terminus aequalis ſit praecedenti per ſuum indicem multiplicato.

Solutio.

Si terminus primus vnitati aequalis ſtatuatur, orietur *Walliſii* ſeries Hypergeometrica haec:

ind:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	etc.
term:	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	40320,	

Ponitur terminus indici x, reſpondens $= y$, cumque ſequens $= y'$, erit $y' = y x$, vnde naſcitur haec aequatio:

$y x =$

$$yx = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

pro tali autem aequatione reſoluenda regula generalis non conſtat. At leui negotio haec aequatio in aliam formam transformatur, quam reſoluere liceat. Ponatur ſcilicet $y = e^v$, erit $y' = e^{v'}$, ideoque fiet $e^{v'} = e^v x$, ſumtisque logarithmis: $v' = v + lx$, quocirca habebitur:

$$lx = \frac{dv}{1dx} + \frac{ddv}{1.2dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4v}{1.2.3.4dx^4} + \frac{d^5v}{1.2.3.4.5dx^5} + \text{etc.}$$

quae aequatio in praecedente continetur, faciendo $X = lx$, quocirca integrale erit:

$$v = \int dxlx \begin{matrix} +2\,\text{coſ.}\,2\pi x\int dxlx.\,\text{coſ.}\,2\pi x + 2\,\text{coſ.}\,4\pi x\int dxlx.\,\text{coſ.}\,4\pi x + \text{etc.} \\ +2\,\text{ſin.}\,2\pi x\int dxlx.\,\text{ſin.}\,2\pi x + 2\,\text{ſin.}\,4\pi x\int dxlx.\,\text{ſin.}\,4\pi x + \text{etc.} \end{matrix}$$

Inuento autem valore ipſius v, erit terminus generalis quaeſitus $y = e^v$: denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$. Q. E. I.

Scholion.

§. 60. Primum huius expreſſionis membrum $\int dxlx$ eſt $= xlx - x$, reliqua vero membra ſingula per ſeries infinitas integrari poterunt. Eſt enim:

$$\int dxlx.\,\text{coſ.}\,mx = \frac{1}{m}\,\text{ſin.}\,mx\left(lx + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1.2.3}{m^4x^4} + \frac{1.2.3.4.5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\,\text{coſ.}\,mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1.2}{m^3x^3} + \frac{1.2.3.4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$

$$\int dxlx.\,\text{ſin.}\,mx = -\frac{1}{m}\,\text{coſ.}\,mx\left(lx + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1.2.3}{m^4x^4} + \frac{1.2.3.4.5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\,\text{ſin.}\,mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1.2}{m^3x^3} + \frac{1.2.3.4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$

Vnde colligitur, fore:

$$\left.\begin{matrix} 2\,\text{coſ.}\,mx\int dxlx.\,\text{coſ.}\,mx \\ +2\,\text{ſin.}\,mx\int dxlx.\,\text{ſin.}\,mx \end{matrix}\right\} = \frac{2}{mmx}\left(1 - \frac{1.2}{m^2x^2} + \frac{1.2.3.4}{m^4x^4} - \frac{1.2.3.4.5.6}{m^6x^6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \alpha\,\text{coſ.}\,mx + \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,mx$$

 Subſti-

Subſtitutis iam ſucceſſiue pro m valoribus 2π, 4π, 6π, etc. cunctisque his expreſſionibus collectis reperietur:

$$
\begin{aligned}
v = C + x\,lx - x \quad & + \tfrac{1}{2\pi^2 x}\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.}\right)\\
\alpha\,\text{coſ.}\,2\pi x + \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,2\pi x \quad & - \tfrac{1.2}{8\pi^4 x^3}\left(1 + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \text{etc.}\right)\\
\beta\,\text{coſ.}\,4\pi x + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,4\pi x \quad & \\
\gamma\,\text{coſ.}\,6\pi x + \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\,6\pi x \quad & + \tfrac{1.2.3.4}{32\pi^6 x^5}\left(1 + \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \text{etc.}\right)\\
\text{etc.} \quad & \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Si nunc pro his ſeriebus poteſtatum *ſummae, a me dudum inuentae*, ſubſtituantur, habebitur:

$$
\begin{aligned}
v = C + x\,lx - x + \alpha\,\text{coſ.}\,2\pi x + \beta\,\text{coſ.}\,4\pi x + \gamma\,\text{coſ.}\,6\pi x + \text{etc.}\\
+ \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,2\pi x + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,4\pi x + \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\,6\pi x + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$+ \tfrac{1}{1.2.3}\cdot\tfrac{1}{2x} - \tfrac{1}{3.4.5}\cdot\tfrac{1}{6x^3} + \tfrac{1}{5.6.7}\cdot\tfrac{1}{6x^5} - \tfrac{1}{7.8.9}\cdot\tfrac{3}{10x^7} + \tfrac{1}{9.10.11}\cdot\tfrac{5}{6x^9} - \text{etc.}$$

ſeu ſi ſit P functio parium dimenſionum ipſarum $r = \text{ſin.}\,\pi x$, et $s = \text{coſ.}\,\pi x$, erit:

$$v = P + x\,lx - x + \tfrac{1}{1.2.3}\cdot\tfrac{1}{2x} - \tfrac{1}{3.4.5}\cdot\tfrac{1}{6x^3} + \tfrac{1}{5.6.7}\cdot\tfrac{1}{6x^5} - \text{etc.}$$

Cum iam poſito $x = 1$, fiat $y = 1$, et $v = 0$; debebit hoc caſu fieri: $P = 1 - \frac{1}{1.2.3.2} + \frac{1}{3.4.5.6} - \frac{1}{5.6.7.6} + \frac{3}{7.8.9.10} - \text{etc.}$ cuius valorem, alibi oſtendi, eſſe $P = \frac{1}{2}\,l\,2\pi$, huncque valorem habebit, quoties x ſit numerus integer quicunque. Hinc ad numeros regrediendo inuenietur terminus generalis quaeſitus:

$$y = \frac{x^x}{e^x}\cdot e^{\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2x} - \frac{1}{3.4.5}\cdot\frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5.6.7}\cdot\frac{1}{6x^5} - \text{etc.}}\ \sqrt{2\pi} \text{ ſeu}$$

$$y = \frac{x^x}{e^x}\ e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \text{etc.}}\ \sqrt{2\pi}$$

Vnde

Vnde ſi x ſit numerus valde magnus, erit proxime:

$$y = \frac{x^x}{e^x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \text{etc.}\right)\sqrt{2\pi}$$

ſicque magnitudo cuiusuis termini, ab initio valde remoti, non difficulter proxime aſſignatur.

CONSIDERATIO QVARVMDAM SERIERVM, QVAE SINGVLARIBVS PROPRIETATIBVS SVNT PRAEDITAE.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Saepe numero *conſideratio ſerierum*, quae quaſi caſu ſe nobis offerunt, non contemnenda ſuppeditare ſolet artificia, quibus deinceps in vniuerſa ſerierum doctrina ſummo cum fructu vti licet. Cum igitur doctrina *de ſeriebus* ſit maximi momenti in Analyſi, huiusmodi ſpeculationes omnino dignae ſunt habendae, quae omni induſtria euoluantur. Hunc in finem ſequentem ſeriem offerre conſtitui, quae, tum ob ſingulares, quibus praedita deprehenditur proprietate, tum vero propter inſignes vſus, quos nobis exhibet, omni attentione digna videtur. Series autem ita ſe habet:

$$\frac{1-x}{1-a}+\frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3}+\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6}+\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}}+\text{etc.}$$

Lex numeratorum ex ſola inſpectione eſt manifeſta, formantur enim ex multiplicatione terminorum huius ſeriei:

$1-x$; $a-x$; a^2-x; a^3-x; a^4-x; a^5-x; a^6-x; etc.

Denominatores omnes duobus conſtant terminis, qui ſunt poteſtates ipſius a, quarum exponentes ſunt numeri trigonales. Hinc terminus ordine n ſeriei propoſitae erit:

$$\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)\;.\;.\;.\;.\;.\;(a^{n-1}-x)}{a^{n(n-1):2}-a^{n(n+1):2}}.$$

§. 2.

§. 2. Primo quidem patet, ſi quantitas x poteſtati cuipiam ipſius a aequalis capiatur, tum ſeriem alicubi ita obrumpi, vt omnes ſequentes termini abeant in nihilum. Ponamus ergo in genere s pro ſumma ſeriei propoſitae, vt ſit:

$$s = \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \text{etc.}$$

ac ſtatuatur primo $x = 1$, ſeu $x = a^0$, eritque ob omnes terminos evaneſcentes $s = 0$. Sit porro $x = a$, vt ſolus primus terminus ſuperſit, eritque $s = 1$. Sit $x = a^2$; fietque $s = \frac{1-a^2}{1-a} + \frac{(1-a^2)(a-a^2)}{a-a^3}$ ſeu $s = 2$. Ponatur $x = a^3$, ac prodibit:

$$s = \frac{1-a^3}{1-a} + \frac{(1-a^3)(a-a^3)}{a-a^3} + \frac{(1-a^3)(a-a^3)(a^2-a^3)}{a^3-a^6}.$$

Horum terminorum primus dat $1 + a + aa$; ſecundus dat $1 - a^3$, et tertius dat $1 - a - aa + a^3$; quibus collectis fiet $s = 3$.

§. 3. Simili modo ſi ponatur $x = a^4$, operatione inſtituta reperietur $s = 4$; et poſito $x = a^5$, prodibit $s = 5$. Vnde ſatis tuto per inductionem concludi poſſe videtur, quoties x cuicunque poteſtati ipſius a, cuius exponens ſit $= n$, aequatio ſtatuatur, toties hunc ipſum exponentem praebiturum eſſe valorem ipſius s. At vero haec inductio tantum valet, ſi n ſit numerus integer affirmatiuus. Quod ſi enim pro quouis numero fracto valeret, tum foret $s =$ logarithmo ipſius x, ſumto a pro numero, cuius longarithmus ſit $= 1$. Sic ſi hoc verum eſſet, poſito $a = 10$, ſumma ſeriei s ſemper exprimere deberet logarithmum communem ipſius x, eſſetque:

$$s = -\frac{(1-x)}{9} - \frac{(1-x)(10-x)}{990} - \frac{(1-x)(10-x)(100-x)}{999000} - \frac{(1-x)(10-x)(100-x)(1000-x)}{9999000000}$$
$$- \text{etc.} \qquad = lx.$$

Ex

Ex ſequentibus autem perſpicuum euadet, hanc aequalitatem non ſubſiſtere, niſi ſit x poteſtas ipſius a, exponentem habens integrum affirmatiuum.

§. 4. Quod autem, poſito $x = a^n$, non ſemper ſit $s = n$, niſi n ſit numerus integer affirmatiuus, ex caſu quo $x = 0$ facile colligitur. Hoc enim caſu, ſi ſuperior inductio ſe ad omnes omnino numeros extenderet, fieri deberet $s = -\infty$, cum $-\infty$ ſit perpetuo longarithmus cyphrae. Verum poſito $x = 0$, fiet:

$$s = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-aa} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4} + \frac{1}{1-a^5} + \text{etc.}$$

quae ſeries etſi ſummari non poteſt, tamen quilibet facile perſpiciet, eius ſummam eſſe debere finitam, neque propterea logarithmum ipſius $x = 0$ exprimere poſſe. Simili modo, ſi poſito $a = 10$, atque x non poteſtati ipſius 10 aequale ponatur, per ſummationem valor inuenietur, plerumque ſatis notabiliter $a\ l\ x$ diſcrepans. Sit enim $x = 9$, poſito $a = 10$, eritque:

$$s = \frac{8}{9} + \frac{8\cdot 1}{\text{[illegible]}} + \frac{8\cdot 1\cdot 91}{\text{[illegible]}} + \frac{8\cdot 1\cdot 91\cdot 991}{\text{[illegible]}} + \frac{8\cdot 1\cdot 91\cdot 991\cdot 9991}{\text{[illegible]}} \text{ etc.}$$

qui termini ſi in fractionibus decimalibus exprimantur, prodibit:

$s = 0,88888888888888888888$
808080808080808080
8008008008008008
80008000800080
800008000080
8000008000
80000008
800000
8000
80

$s = 0,89705058521067321224$

qui

qui valor vtique minor eſt, quam logarithmus novenarii.

§. 5. Series igitur noſtra ita eſt comparata, vt ſi pro x ſubſtituantur poteſtates ipſius a rationales, ſumma ſeriei aequalis fiat exponenti illius poteſtatis: ſcilicet

ſi ſit $x = a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8$, etc.

erit $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, etc.

quae etſi eſt proprietas logarithmorum, tamen non niſi exponentes ipſius a ſint numeri integri. Quod ſi ergo concipiatur linea curua, cuius abſciſſae ſint s, et applicatae $= x$, haec curua logarithmicam in punctis innumeris interſecabit, ſcilicet quoties abſciſſa s per numerum integrum exprimitur, toties applicata per interſectionem tranſibit. Vnde patet, curuam logarithmicam ne per infinita quidem puncta determinari; quod etiam in omnibus aliis lineis curuis vſu venit. Hinc itaque intelligitur, quam libet ſeriem, etſi omnes eius termini indicibus integris reſpondentes dentur, infinitis modis diuerſis interpolari poſſe, quod argumentum alia occaſione vberius pertractabo.

§. 6. Quo autem propius ad cognitionem noſtrae ſeriei perueniamus, eam in hanc formam transmutare licet:

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right) + \frac{1}{1-a^4}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{aa}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right) \text{etc.}$$

quae propterea ſimplicior eſt praecedente, quod hic numeri trigonales abierint. Ponamus nunc $a\,x$ in locum ipſius x, denotetque t ſummam ſeriei hinc reſultantis, erit:

$$t = \frac{1}{1-a}(1-ax) + \frac{1}{1-a^2}(1-ax)(1-x) + \frac{1}{1-a^3}(1-ax)(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{1-a^4}(1-ax)(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{aa}\right) + \text{etc.}$$

ſubtrahatur prior ſeries a poſteriore, ac reperietur:

 $t-s$

$$t - s = x + \frac{x}{a}(1-x) + \frac{x}{aa}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{x}{a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) + \text{etc.}$$

ſubtrahatur haec ſeries ab vnitate, et cum reſiduum ſit per $1 - x$ diuiſibile erit:

$$1 + s - t = (1-x)(1 - \frac{x}{a} - \frac{x}{aa}(1-\frac{x}{a}) - \frac{x}{a^3})(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) - \text{etc.})$$

Hic factor poſterior autem porro diuiſibilis eſt per $1 - \frac{x}{a}$, vnde fit $1 + s - t = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1 - \frac{x}{aa} - \frac{x}{a^3}(1-\frac{x}{aa}) - \text{etc.})$ Hic denuo factor deprehenditur $1 - \frac{x}{aa}$, hocque ſeorſim expreſſo, factor apparebit $1 - \frac{x}{a^3}$, et ita porro, vnde tandem reperitur fore:

$$1 + s - t = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})(1-\frac{x}{a^4})(1-\frac{x}{a^3}) \text{ etc.}$$

§. 7. Hinc igitur patet, quoties x aequalis capiatur cuipiam poteſtati ipſius a, ob vnum factorem huius expreſſionis euaneſcentem fore $1 + s - t = 0$, ſeu $t = 1 + s$. Quare ſi poſito $x = a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fuerit ſumma ſeriei propoſitae $s = n$, poſito $x = a^{n+1}$, erit ſumma ſeriei $t = s + 1 = n + 1$. Cum igitur ſumto $n = 0$, ſeu $x = 1$, ſit ſumma ſeriei $s = 0$, erit, poſito $x = a^1$, ſumma ſeriei $s = 1$: hincque porro ſequitur, ſi ponatur $x = a^2$, fore $s = 2$, et ſi $x = a^3$, fore $s = 3$. Atque in genere nunc patet, quod ante per ſolam inductionem elicuimus, ſi fiat $x = a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fore perpetuo $s = n$. Sin autem n non ſit numerus integer affirmatiuus, atque s deſignet ſummam ſeriei initio propoſitae, facto $x = a^n$, tum poſito $x = a^{n+1}$, ſumma ſeriei, quae ſit $= t$ non erit $= s + 1$, fiet enim:

$$t = 1 + s - (1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})(1-a^{n-4}) \text{ etc.}$$

His

His ergo caſibus valor ſeriei manifeſte recedit a natura logarithmorum.

§. 8. Quemadmodum hic valores ipſius x per a multiplicando ex valore ipſius s eliciuimus valorem ipſius t, ita viciſſim valores ipſius x per a diuidendo ex valore ipſius t obtinebimus valorem ipſius s; hincque ad valores negatiuos exponentis n deſcendere poterimus. Scilicet in ſerie initio propoſita, vel ad hanc formam perducta:

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2}) + \text{etc.}$$

pro ſequentibus caſibus ſummam ſeriei ita indicemus:

ſi $x = 1$	ſit	$s = A = 0$
$x = \frac{1}{a}$	- - -	$s = B$
$x = \frac{1}{a^2}$	- - -	$s = C$
$x = \frac{1}{a^3}$	- - -	$s = D$
$x = \frac{1}{a^4}$	- - -	$s = E$
	etc.	

Quod ſi iam ponatur $x = \frac{1}{a}$; fiet $s = B$, et $t = A = 0$, quia t oritur ex s, ſi loco x ſcribatur $a\,x$: ex praecedentibus oritur:

$$1 + B = (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

ſeu $B = -1 + (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5})$ etc.

ſic ſi $a = 10$, fiet $B = -0,10998990000998$.

§. 9. Sit $x = \frac{1}{a^2}$, eritque $s = C$, et $t = B$; vnde habebitur;

$$1 + C - B = (1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3}(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

ad hanc addatur prior $1 + B$, eritque:

$$2 + C = (2-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

 et

et $C = -2 + \left(2 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)$ etc.

Vel ipſa ſerie eliminata erit:

$1 + B = \left(1 - \frac{1}{a}\right)(1 + C - B)$, ſeu $C - 2B = \frac{1}{a}(1 + C - B)$.

Simili modo ſi ponatur $x = \frac{1}{a^3}$. erit $s = D$, et $t = C$, vnde fiet:

$1 + D - C = \left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)$ etc.

ad quam prior ſeries addita praebebit:

$3 + D = \left(3 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)$ etc.

Ac poſito $x = \frac{1}{a^4}$ cum fiat:

$1 + E - D = \left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)\left(1 - \frac{1}{a^7}\right)$ etc. erit

$4 + E = \left(4 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^5} - \frac{1}{a^6}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)$ etc.

ſicque quousque libuerit, vlterius progredi licet.

§. 10. Poteſt autem inter ternos valores ſummae ſeriei s, pro ternis valoribus ipſius x ſucceſſiuis, relatio per expreſſionem finitam exhiberi. Manente enim pro valore x ſumma $= s$, ſit ſi loco x ponatur $a x$, ſumma ſeriei $= t$, et ſi loco x ponatur $a a x$, ſit ſumma ſeriei $= u$. Cum igitur inter t et s hanc inuenerimus relationem:

$1 + s - t = (1 - x)\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x}{a^3}\right)\left(1 - \frac{x}{a^4}\right)$ etc.

ſi hic pro x ſcribamus $a x$, prodibit relatio ſimilis inter u et t:

$1 + t - u = (1 - a x)(1 - x)\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x}{a^3}\right)$ etc.

Hinc ergo erit $1 + t - u = (1 - a x)(1 + s - t)$ ſiue

$$u = 2t - s + a x(1 + s - t)$$

vel $s = \frac{2t - u + ax(1 - t)}{1 - ax}$

Atque

Atque hinc pro ſupra aſſumtis valoribus A, B, C, D, etc. ſequentes prodibunt relationes.

Si $x = \frac{1}{a^2}$; erit $A = 2B - C + \frac{1}{a}(1 + C - B)$

ſeu $C = \frac{1+(2a-1)B-aA}{a-1} = B + \frac{1+a(B-A)}{a-1}$

ſi $x = \frac{1}{a^3}$; erit $D = C + \frac{1+a^2(C-B)}{a^2-1}$

ſi $x = \frac{1}{a^4}$; erit $E = D + \frac{1+a^3(D-C)}{a^3-1}$

ſi $x = \frac{1}{a^5}$; erit $F = E + \frac{1+a^4(E-D)}{a^4-1}$

etc.

Hae relationes autem ſequenti modo commodius exprimi poſſunt:

$$C = 2B - A + \frac{1+B-A}{a-1}$$

$$D = 2C - B + \frac{1+C-B}{a^2-1}$$

$$E = 2D - C + \frac{1+D-C}{a^3-1}$$

$$F = 2E - D + \frac{1+E-D}{a^4-1}$$

etc.

Cum ergo ſit $A = 0$, ſi ſolius litterae B valor fuerit repertus:

$$B = -1 + \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^3}\right)\left(1-\frac{1}{a^4}\right) \text{ etc.}$$

hinc omnium ſequentium litterarum C, D, E, F, etc. valores exacto poterunt aſſignari.

§. 11. Cum autem denotante n numerum integrum affirmatiuum, ſi ponatur $x = a^n$, ſit $s = n$, ex noſtra aſſumta ſerie conſequemur hanc ſummabilem.

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

Tum vero hoc caſu, quia eſt $t = n + 1$, erit:

 $1 =$

$$1 = a^n + a^{n-1}(1-a^n) + a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1}) + a^{n-3}(1-a^n)(1-a^{n-1})(1a^{n-2}) \text{ etc.}$$

cuius veritas omnibus terminis ad eandem partem coniectis eſt manifeſta; fiet enim:

$$(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})(1-a^{n-4}) \text{ etc.} = 0.$$

Hinc anſam nanciſcimur generalius huiusmodi formas contemplandi. Sit enim A, B, C, D, E, F, etc. ſeries quantitatum quarumuis, ſitque:

$$(1-A)(1-B)(1-C)(1-D)(1-E) \text{ etc.} = S.$$

Atque hinc obtinebitur:

$$1 - A - B(1-A) - C(1-A)(1-B) - D(1-A)(1-B)(1-C) - \text{etc.} = S;$$

haec enim formula facillime reducitur ad illam. Hanc ob rem habebimus:

$$A + B(1-A) + C(1-A)(1-B) + D(1-A)(1-B)(1-C) + \text{etc.} = S + 1.$$

§. 12. Quod ſi ergo quaepiam harum quantitatum A, B, C, etc. vnitati fiat aequalis, erit $S = 0$, prodibitque ſeries, cuius ſumma $= 1$. Sumatur verbi gratia haec ſeries:

$$\begin{matrix} A & B & C & D & E & F \\ \frac{1}{2}; & \frac{2}{3}; & \frac{3}{4}; & \frac{4}{5}; & \frac{5}{6}; & \frac{6}{7}; \text{ etc.} \end{matrix}$$

quarum fractionum cum infinitiſſima ſit $= 1$, erit $S = 0$, et ſequens naſcetur ſeries:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{ etc.}$$

cuius quidem veritas facile perſpicitur, oritur enim ea hoc modo:

ſit $z = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{ etc.}$

erit $z\ 1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{ etc.}$ hincq. per ſubtr. prodit

$1 =$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.}$$

§. 13. Sit $A = \frac{1}{9}$; $B = \frac{1}{25}$; $C = \frac{1}{49}$; $D = \frac{1}{81}$; etc. erit $S = \frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{120}{121}\cdot\text{etc.} = \frac{\pi}{4}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt $= 1$. Hinc ergo orietur haec ſeries pro quadratura circuli.

$$\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9\cdot 25} + \frac{8\cdot 24}{9\cdot 25\cdot 49} + \frac{8\cdot 24\cdot 48}{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81} + \text{etc.}$$

ſeu $\frac{9}{4}\pi + 8 = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9} + \text{etc.}$

Cum ergo huiusmodi producta, quorum valor S exhiberi poteſt, innumerabilia habeantur: ex quolibet hoc modo ſeries infinita, cuius ſumma aſſignari queat, deriuabitur. Ampliſſimus ergo hinc aperitur campus, ſeries ſummabiles, quotquot libuerit, inueniendi.

§. 14. Reuertor autem ad ſeriem initio aſſumtam

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right) + \text{etc.}$$

quam in aliam formam, in qua termini ſecundum poteſtates ipſius x procedant, transfundere animus eſt. Hoc primo quidem per euolutionem ſingulorum terminorum fieri poſſet, at quia hoc pacto prodituri eſſent ſinguli coefficientes in ſeriebus infinitis, commodiſſime in hunc finem adhibebitur formula ſupra inuenta $u = 2t - s + ax(1 - t + s)$, ſeu $u - 2t + s = ax + ax(s - t)$, vbi ex s naſcitur t, ſi loco x ponatur ax, parique modo ex t fit u, ſi loco x denuo ponatur ax. Quare ſi pro ſerie quaeſita aſſumamus

$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$ erit:

$t = A + Bax + Ca^2x^2 + Da^3x^3 + Ea^4x^4 + Fa^5x^5 + \text{etc.}$ et

$u = A + Ba^2x + Ca^4x^2 + Da^6x^3 + Ea^8x^4 + Fa^{10}x^5 + \text{etc.}$

Ex

Ex his ergo conficietur:

$$u-2t+s=B(1-a)^2x+C(1-aa)^2x^2+D(1-a^3)^2x^3+E(1-a^4)^2x^4+\text{etc.}$$

$$ax(1+s-t)=ax+Ba(1-a)x^2+Ca(1-aa)x^3+Da(1-a^3)x^4+\text{etc.}$$

Ex quarum ſerierum aequalitate coucluditur fore:

$$B=\frac{a}{(1-a)^2};\ C=\frac{Ba(1-a)}{(1-aa)^2};\ D=\frac{Ca(1-aa)}{(1-a^3)^2};\ E=\frac{Da(1-a^3)}{(1-a^4)^2};\ \text{etc.}$$

§. 15. Hinc ergo ſequentes coefficientium aſſumtorum valores obtinebuntur:

$$B=\frac{a}{(1-a)^2}$$

$$C=\frac{a^2}{(1-a)(1-aa)^2}$$

$$D=\frac{a^3}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)^2}$$

$$E=\frac{a^4}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)(1-a^4)^2}$$

$$F=\frac{a^5}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)^2}$$

etc.

Primus autem terminus A hinc non definitur. At quia A praebet valerem ipſius s, ſi ponatur $x=0$, perſpicuum eſt fore:

$$A=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+\text{etc.}$$

His ergo valoribus definitis, ſeries initio propoſita:

$$s=\frac{1}{1-a}(1-x)+\frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\tfrac{x}{a})+\frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\tfrac{x}{a})(1-\tfrac{x}{aa})+\text{etc.}$$

transmutabitur in hanc formam:

$$s=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+\text{etc.}\\ +\frac{ax}{(1-a)^2}+\frac{a^2x^2}{(1-a)(1-aa)^2}+\frac{a^3x^3}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)^2}+\frac{a^4x^4}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)^2}+\text{etc}\end{array}\right\}$$

§. 16. Cum igitur poſito $x=a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fiat $s=n$, habebitur haec ſummatio:

$n+$

$$n + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \frac{1}{a^5-1} + \text{etc.} =$$

$$\frac{a^{n+1}}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(aa-1)^2} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \frac{a^{4n+4}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)^2} + \text{etc.}$$

Quod ſi ergo fuerit $n = 0$, erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \text{etc.} = \frac{a}{(a-1)^2} - \frac{a^2}{(a-1)(aa-1)^2} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} + \text{etc.}$$

ac, ſi ponatur $n = 1$, erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \text{etc.} = \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{a^4}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^6}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \text{etc.} - 1$$

Generaliter ergo erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \text{etc.} = \frac{a^{n+1}}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \text{etc.} - n$$

denotante n numerum integrum quemcunque affirmatiuum.

§. 17. Si loco n ponatur $n-1$, habebitur:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \text{etc.} = \frac{a^n}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - n + 1$$

a qua, ſi ſeries ſuperior auferatur, proueniet:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{a^{4n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

Huius ergo ſeriei ſumma ſemper aequalis eſt vnitati, quicunque valor ipſi a tribuatur, et quicunque numerus integer affirmatiuus pro n ſubſtituatur. Caſu autem quo $n = 1$ haec ſummatio facile perſpicitur. Quod enim ſit:

$$1 = \frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

ſequitur luculenter ex conſideratione huius ſeriei:

$$z = 1 - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{etc.}$$ vnde fit:

$$1 - z = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

quae inuicem additae dabunt:

 $1 =$

$$1 = \frac{a}{a-1} - \frac{aa}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{a^4}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

§. 18. Deinde autem veritas iſtius ſeriei pro reliquis ipſius n valoribus ſequentem in modum oſtendi poteſt. Si fuerit:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

dico fore quoque:

$$1 = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

Nam cum ſit per hypotheſin:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc. crit quoque}$$

$$0 = a^n - \frac{a^{2n}}{a-1} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)} - \text{etc.}$$

quae ſeries inuicem additae dabunt:

$$1 = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

Quare cum haec ſeries:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

vera ſit oſtenſa caſu $n = 1$, erit quoque vera caſu $n = 2$, hincque porro caſibus $n = 3$, $n = 4$, etc. ita vt quicunque numerus integer affirmatiuus pro n ſubſtituatur, ſumma ſeriei perpetuo futura ſit $= 1$.

§ 19. Quoniam ſeriem initio propoſitam $s = \frac{1}{1-x}$ $(1-x)$ etc. ſecundum dimenſiones ipſius x hic diſpoſui, ope proprietatis ſupra demonſtratae $u - 2t + s = ax + ax(s-t)$; non incongruum erit eandem transmutationem immediate

ex ipſa ſerie s deriuare; ſic enim ad ſummationem innumerabilium nouarum ſerierum pertingemus. Oportebit ergo ſingulos ſeriei s terminos per multiplicationem euolvi, quod vt expeditius fieri poſſit, conſiderabo terminum quemcunque: $\frac{1}{(1-a^m)}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

Ponam ergo $P=(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

eritque $lP=l(1-x)+l(1-\frac{x}{a})+l(1-\frac{x}{a^2})+\ldots+l(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

et differentiando fiet:

$\frac{dP}{P}=\frac{-dx}{1-x}-\frac{dx}{a-x}-\frac{dx}{aa-x}-\ldots-\frac{dx}{a^{m-1}-x}$. ſeu

$$\frac{dP}{P}=-dx\left\{\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\text{ etc. infin.} \\ \frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\frac{x^4}{a^5}+\frac{x^5}{a^6}+\text{ etc.} \\ \frac{1}{a^2}+\frac{x}{a^4}+\frac{x^2}{a^6}+\frac{x^3}{a^8}+\frac{x^4}{a^{10}}+\frac{x^5}{a^{12}}+\text{ etc.} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{1}{a^{m-1}}+\frac{x}{a^{2m-2}}+\frac{x^2}{a^{3m-3}}+\frac{x^3}{a^{4m-4}}+\frac{x^4}{a^{5m-5}}+\frac{x^5}{a^{6m-6}}+\text{ etc} \end{array}\right\}$$

ſingulas nunc ſeries verticales ſummando orietur:

$$dP=-Pdx\left(\frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}}+\frac{a^{2m}-1}{a^{2m}-a^{2m-2}}x+\frac{a^{3m}-1}{a^{3m}-a^{3m-3}}x^2+\frac{a^{4m}-1}{a^{4m}-a^{4m-4}}x^3+\text{ etc.}\right)$$

§. 20, Fingatur nunc pro P haec ſeries:

$P=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+$ etc. eritque:

$\frac{dP}{dx}=\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3+5\zeta x^4+$ etc.

N 2 Facta

Facta iam ſubſtitutione fiet:

$$\beta + \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\,\alpha = 0$$

$$2\gamma + \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\,\beta + \frac{a^{2m} - 1}{a^{2m} - a^{2m-2}}\,\alpha = 0$$

$$3\delta + \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\,\gamma + \frac{a^{2m} - 1}{a^{2m} - a^{2m-2}}\,\beta + \frac{a^{3m} - 1}{a^{3m} - a^{3m-3}}\,\alpha = 0$$

etc.

atque cum poſito $x = 0$, fiat $P = 1$, patet eſſe $\alpha = 1$. Erit ergo $\beta = \frac{-a^m + 1}{a^m - a^{m-1}}$ et $2\gamma - \frac{(a^m - 1)^2}{(a^m - a^{m-1})^2} + \frac{a^{2m} - 1}{a^{2m} - a^{2m-2}} = 0$

ſeu $2\gamma = \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\left(\frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}} - \frac{a^m - 1}{a^m + a^{m-1}}\right) = \frac{2a^m(a^{m-1} - 1)(a^m - 1)}{(a^m - a^{m-1})(a^{2m} - a^{2m-2})}$

ideoque $\gamma = \frac{(a^m - 1)(a^{m-1} - 1)}{(a^m - a^{m-1})(a^m - a^{m-2})}$. Simili modo reliqui coefficientes, verum tamen non ſine ingenti labore eruentur, atque tandem ſatis concinne exprimi deprehendentur.

§. 21. Quo igitur hanc coefficientium determinationem commodius expediam, methodum hic iam aliquoties vſurpatam adhibebo. Scilicet in ſerie $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ etc. loco x pono $\frac{x}{a}$, ſeriei que reſultantis ſumma ſit $= Q$, nempe;

$$Q = \alpha + \frac{\beta x}{a} + \frac{\gamma x^2}{a^2} + \frac{\delta x^3}{a^3} + \frac{\varepsilon x^4}{a^4} + \text{etc.}$$

Cum autem ſit $P = (1 - x)(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{x}{aa}) \ldots (1 - \frac{x}{a^{m-1}})$

erit $Q = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{x}{a^2})(1 - \frac{x}{a^3}) \ldots (1 - \frac{x}{a^m})$, ideoque

P(1 -

$$P\left(1-\frac{x}{a^m}\right)=Q(1-x)$$. ſeu $a^mP-Px-a^mQ+a^mQx=0$,

ſubſtituantur hic ſeries pro P et Q aſſumtae, fietque

$$\left.\begin{array}{l} \alpha a^m+\beta a^m x+\gamma a^m x^2+\delta a^m x^3+\text{ etc.} \\ \quad -\alpha x \quad -\beta x^2 \quad -\gamma x^3 \quad -\text{ etc.} \\ -\alpha a^m-\beta a^{m-1}x-\gamma a^{m-2}x^2-\delta a^{m-3}x^3-\text{ etc.} \\ \quad +\alpha a^m x+\beta a^{m-1}x^2+\gamma a^{m-2}x^3+\text{ etc.} \end{array}\right\}=0.$$

Ex comparatione terminorum homogeneorum hinc invenitur:

$$\beta=\frac{-\alpha(a^m-1)}{a^{m-1}(a-1)} \quad ; \quad \delta=\frac{-\gamma(a^{m-2}-1)}{a^{m-3}(a^3-1)}$$

$$\gamma=\frac{-\beta(a^{m-1}-1)}{a^{m-2}(aa-1)} \quad ; \quad \varepsilon=\frac{-\delta(a^{m-3}-1)}{a^{m-4}(a^4-1)}$$

etc.

§. 22. Cum igitur ſit $\alpha=1$, coefficientes ita ſe habebunt;

$$\alpha=1$$

$$\beta=\frac{-(a^m-1)}{a^{m-1}(a-1)}$$

$$\gamma=\frac{+(a^m-1)(a^{m-1}-1)}{a^{2m-3}(a-1)(aa-1)}$$

$$\delta=\frac{-(a^m-1)(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)}{a^{3m-6}(a-1)(aa-1)(a^3-1)}$$

$$\varepsilon=\frac{+(a^m-1)(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)(a^{m-3}-1)}{a^{4m-10}(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)}$$

etc.

Terminus ergo ſeriei s, quicunque $\frac{1}{1-a^m}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})\ldots\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$ evolutus, dabit hanc progreſſionem:

$$\frac{1}{1-a^m}-\frac{1}{a^{m-1}(1-a)}x+\frac{(1-a^{m-1})x^2}{a^{2m-3}(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})x^3}{a^{3m-6}(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}.$$

Si igitur ſucceſſiue pro m numeri 1, 2, 3, 4, etc. ſubſtituantur, prodibunt ſequentes formulae, ſeu termini ſeriei s.

Primus $=\frac{1}{1-a}-\frac{x}{1-a}$

Secund: $=\frac{1}{1-a^2}-\frac{x}{a(1-a)}+\frac{(1-a)x^2}{a(1-a)(1-a^2)}$

Tert: $=\frac{1}{1-a^3}-\frac{x}{a^2(1-a)}+\frac{(1-a^2)x^2}{a^3(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a)(1-a^2)x^3}{a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}$

Quart: $=\frac{1}{1-a^4}-\frac{x}{a^3(1-a)}+\frac{(1-a^3)xx}{a^5(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a^2)(1-a^3)x^3}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)x^4}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}$

etc.

§. 23. Si ergo omnes iſti termini in vnam ſummam colligantur, prodibit congeries infinitarum ſerierum, quae ſimul ſumtae, ſeriei initio propoſitae, erunt aequales. Scilicet cum ſit:

$s=\frac{1}{1-a}(1-x)+\frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a})+\frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})+$ etc. erit:

$s=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+$ etc.

$\frac{-x}{1-a}(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+$ etc.$)$

$\frac{+x^2}{a(1-a)(1-a^2)}(\frac{1-a}{1}+\frac{1-a^2}{a^2}+\frac{1-a^3}{a^4}+\frac{1-a^4}{a^5}+$ etc.$)$

$\frac{-x^3}{a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}(\frac{(1-a)(1-a^2)}{1}+\frac{(1-a^2)(1-a^3)}{a^3}+\frac{(1-a^3)(1-a^4)}{a^6}+$ etc.$)$

$\frac{+x^4}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}(\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{1}+\frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{a^4}+$ etc.$)$

etc.

Cum

Cum igitur haec ſeries congruere debeat cum ante inuenta, ex conſenſu ſingularum harum ſerierum ſumma reperientur.

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \text{etc.} = \frac{-a}{1-a}$$

$$\frac{1-a}{1} + \frac{1-a^2}{a^2} + \frac{1-a^3}{a^4} + \frac{1-a^4}{a^6} + \text{etc.} = \frac{+a^3}{1-aa}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)}{a^3} + \frac{(1-a^3)(1-a^4)}{a^6} + \text{etc.} = \frac{-a^6}{1-a^3}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{a^4} + \text{etc.} = \frac{+a^{10}}{1-a^4}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}{a^5} + \text{etc.} = \frac{-a^{15}}{1-a^5}$$

§. 24. Hae ſeries in ſequentes formas transfundi poſſunt, ex quibus lex progreſſionis clarius perſpicietur:

$$\frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{a^2}{a^2-1} = (1-\tfrac{1}{a}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2}) + \tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3}) + \tfrac{1}{a^3}(1-\tfrac{1}{a^4}) + \tfrac{1}{a^4}(1-\tfrac{1}{a^5}) + \text{etc.}$$

$$\frac{a^3}{a^3-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3}) + \tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4}) + \text{etc.}$$

$$\frac{a^4}{a^4-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4}) + \text{etc.}$$

$$\frac{a^5}{a^5-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})(1-\tfrac{1}{a^5}) + \text{etc.}$$

etc.

Vnde colligitur ſore generaliter $\frac{a^{m+1}}{a^{m+1}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{a^{m+1}}}$

$$= (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})\dots(1-\frac{1}{a^m}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})\dots(1-\frac{1}{a^{m+1}}) +$$

$$\tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})\dots(1-\frac{1}{a^{m+2}}) + \tfrac{1}{a^3}(1-\tfrac{1}{a^4})(1-\tfrac{1}{a^5})\dots(1-\frac{1}{a^{m+3}}) + \text{etc.}$$

§. 25. Summa huius ſeriei etiam hoc modo inueſtigari poteſt. Sit breuitatis gratia $\frac{1}{a} = b$, atque ponatur ſumma quaeſita:

$z =$

$$z = (1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^m) + b(1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+1}) + b^2(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+2}) + b^3(1-b^4)(1-b^5)\ldots(1-b^{m+3}) + \text{etc.}$$

Multiplicetur vtrinque per $1-b^{m+1}$, atque prodibit:

$$(1-b^{m+1})z = (1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^m)(1-b^{m+1}) + (1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+1})(b-b^{m+2}) + (1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+2})(b^2-b^{m+3}) + \text{etc.}$$

At eſt $b-b^{m+2} = 1-b^{m+2}-(1-b)$; $b^2-b^{m+3} = 1-b^{m+3}-(1-bb)$ $b^3-b^{m+4} = 1-b^{m+4}-(1-b^3)$, etc. qui valores loco vltimorum factorum ſubſtituti dabunt.

$$(1-b^{m+1})z = (1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{m+1}) + (1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+2})$$
$$-(1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{m+1}) - (1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+2})$$
$$+(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+3}) + (1-b^4)(1-b^5)\ldots(1-b^{m+4}) + \text{etc.}$$
$$-(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+3}) - \text{etc.}$$

Cum ergo omnes termini deſtruantur, ſolus remanebit vltimus, $(1-b^{m+1})z = (1-b^\infty)(1-b^{\infty+1})\ldots(1-b^{m+\infty})$, vnde patet, ſi fuerit $b < 1$, hoc eſt $a > 1$, vti aſſumimus, fore $(1-b^{m+1})z = 1$, ideoque $z = \frac{1}{1-b^{m+1}} = \frac{a^{m+1}}{a^{m+1}-1}$, vti inueneramus.

§. 26. Ex iis, quae §. XXI. ſunt tradita, facile reperitur ſeries ſecundum dimenſiones ipſius x procedens, quae aequalis ſit huic producto infinitorum Factorum.

$$P = (1-x)(1-\tfrac{x}{a})(1-\tfrac{x}{a^2})(1-\tfrac{x}{a^3})(1-\tfrac{x}{a^4}) \text{ etc.}$$

Poſito enim $P = 1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3+\delta x^4-\varepsilon x^5+$ etc. ſcribatur ax loco x, et valor reſultans ſit $= Q$, erit:

$$Q = (1-ax)(1-x)(1-\tfrac{x}{a})(1-\tfrac{x}{aa})(1-\tfrac{x}{a^3}) \text{ etc. } = P-axP$$

et

et $Q = 1 - \alpha a x + \beta a^2 x^2 - \gamma a^3 x^3 + \delta a^4 x^4 - \varepsilon a^5 x^5 +$ etc.
ſed $axP = ax - \alpha a x^2 + \beta a x^3 - \gamma a x^4 + \delta a x^5 -$ etc.
$-P = -1 + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 - \delta x^4 + \varepsilon x^5 -$ etc.
vnde fit $\alpha = \frac{a}{a-1}$; $\beta = \frac{\alpha a}{a^2-1}$; $\gamma = \frac{\beta a}{a^3-1}$; $\delta = \frac{\gamma a}{a^4-1}$ etc.
Quam ob rem productum infinitum $P = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})$ etc. reſoluetur in hanc ſeriem infinitam:

$$P = 1 - \frac{ax}{a-1} + \frac{a^2x^2}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^3x^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \frac{a^4x^4}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} \text{ etc.}$$

§. 27. Si igitur iſtud productum P nihilo aequale ponatur haec aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{ax}{a-1} + \frac{a^2x^2}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^3x^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{ etc.}$$

omnes ſuas radices x habebit reales, eruntque valores ipſius x terminis iſtius progreſſionis Geometricae:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ \text{etc.}$$

vnde ſi ponatur $x = a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum quemcunque, erit:

$$0 = 1 - \frac{a^{n+1}}{a-1} + \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{ etc.}$$

cuius veritas iam ſupra §. XVIII. eſt demonſtrata.

§. 28. Praecipue autem eſt notatu digna ſeries, cui ſupra innumerabiles aliae aequales ſunt inuentae (§. XVI.), quae eſt

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \frac{1}{a^5-1} + \text{ etc.}$$

cuius ſumma, ſi $a > 1$, etſi eſt finita et per approximationes facile aſſignatur, tamen neque numeris rationalibus, neque irrationalibus exprimi poteſt. Quo circa ea imprimis digna videtur, vt Geometriae naturam illius quan-

titatis tranſcendentis inueſtigent, qua eius ſumma exprimatur.

§. 29. Monſtrabo autem, quem ad modum ſumma huiusmodi ſerierum vero proxime expedite inueniri poſſet, et quidem hanc ſeriem in aliquanto latiori ſenſu conſiderabo. Sit:

$$s = \frac{1}{a-z} + \frac{1}{a^2-z} + \frac{1}{a^3-z} + \frac{1}{a^4-z} + \frac{1}{a^5-z} + \text{etc.}$$

Conuertantur ſinguli termini in ſeries Geometricas, eritque:

$$s = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \text{etc.}$$
$$+ z\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^{10}} + \text{etc.}\right)$$
$$+ z^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^9} + \frac{1}{a^{12}} + \frac{1}{a^{15}} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

quae ſeries denuo ſummatae dabunt:

$$s = \frac{1}{a-1} + \frac{z}{aa-1} + \frac{zz}{a^3-1} + \frac{z^3}{a^4-1} + \frac{z^4}{a^5-1} + \text{etc.}$$

Quod ſi ergo fuerit $z = 1$, hae ambae ſeries in eandem recidunt, neque haec transmutatio vllum affert diſcrimen.

§. 30. Ad ſeriem hanc ſummandam ponamus prioris formae iam n terminos actu eſſe ſummatos, quorum ſumma ſit $= A$, ita vt ſit:

$$A = \frac{1}{a-z} + \frac{1}{a^2-z} + \frac{1}{a^3-z} + \frac{1}{a^4-z} + \ldots\ldots + \frac{1}{a^n-z}$$

Erit ergo tota ſumma quaeſita:

$$s = A + \frac{1}{a^{n+1}-z} + \frac{1}{a^{n+2}-z} + \frac{1}{a^{n+3}-z} + \frac{1}{a^{n+4}-z} + \text{etc.}$$

Iam iſtae fractiones in ſeries Geometricas euoluantur, eritque:

$s = A.$

$$s = A + \frac{1}{a^{n+1}} + \frac{1}{a^{n+2}} + \frac{1}{a^{n+3}} + \frac{1}{a^{n+4}} + \text{etc.}$$

$$+ z\left(\frac{1}{a^{2n+2}} + \frac{1}{a^{2n+4}} + \frac{1}{a^{2n+6}} + \frac{1}{a^{2n+8}} + \text{etc.}\right)$$

$$+ z^2\left(\frac{1}{a^{3n+3}} + \frac{1}{a^{3n+6}} + \frac{1}{a^{3n+9}} + \frac{1}{a^{3n+12}} + \text{etc.}\right)$$

etc.

quae ſeries denuo ſummatae dabunt:

$$s = A + \frac{1}{a^n(a-1)} + \frac{z}{a^{2n}(aa-1)} + \frac{zz}{a^{3n}(a^3-1)} + \frac{z^3}{a^{4n}(a^4-1)} + \text{etc.}$$

quae eo citius conuergit, quam prima, quo maior fuerit numerus n.

§. 31. Sit: $a = 2$, vt ſit $s = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \frac{1}{8-z} + \frac{1}{16-z} + \text{etc.}$ Si igitur fuerit: $A = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \frac{1}{8-z} + \ldots\ldots + \frac{1}{z^n - z}$

erit: $s = A + \frac{1}{1.2^n} + \frac{z}{3.2^{2n}} + \frac{z^2}{7.2^{3n}} + \frac{z^3}{15.2^{4n}} + \frac{z^4}{31.2^{5n}} + \text{etc.}$

Ponamus autem $z = 1$, ita vt quaeratur ſumma huius ſeriei: $s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{63} + \text{etc.}$

Addantur exempli cauſa quatuor termini initiales actu, vt ſit $n = 4$; erit:

$1 = 1,000000000000000$
$\frac{1}{3} = 0,333333333333333$
$\frac{1}{7} = 0,142857142857142$
$\frac{1}{15} = 0,066666666666666$

$A = 1,542857142857141$

Hinc erit $s = A + \frac{1}{16.1} + \frac{1}{16.^2 3} + \frac{1}{16.^3 7} + \frac{1}{16.^4 15} + \text{etc.}$

 atque

atque iſti termini in fractionibus decimalibus dabunt :

$$0,063838009558149$$

$$A = 1,542857142857142$$

Ergo $s = 1,606695152415291$

§. 32. Ceterum ſi ſeriei $s = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} +$ etc. ſinguli termini in ſeries Geometricas reſoluantur, atque poteſtates ſimiles ipſius a colligantur, reperietur haec forma :

$$s = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^5} + \frac{4}{a^6} + \frac{2}{a^7} + \frac{4}{a^8} + \frac{3}{a^9} + \text{etc.}$$

quae ſeries hanc habet proprietatem, vt cuiuſuis fractionis numerator indicet, quot diuiſores habeat exponens ipſius a in denominatore. Sic fractionis $\frac{4}{a^6}$ numerator eſt $= 4$, quia exponens 6 quatuor habet diuiſores 1, 2, 3, 6. Vnde ſi exponens ipſius a in denominatore ſit numerus primus, numerator perpetuo erit $= 2$: pro numeris autem non primis erit is binario maior. Hinc facile patet, ſi $a = 10$ fore :

$$s = 0,122324243426244526264428344628.$$

DE

DE DIVISORIBVS NVMERORVM INDAGANDIS.

AVCTORE
G. W. KRAFFT.

§. 1.

An numerus quis propoſitus diuiſores admittat ſimplices 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, facilibus regulis quidem cognoſci poteſt: ſed ſi nullum horum recipiat, tum plerumque non niſi magna opera, aut aliquando plane non, talis diuiſor detegitur. Ita exempli gratia nemo facile deteget, numerum hunc 11339 compoſitum eſſe ex factoribus 17, 23, et 29; et multo difficilius, aut plane non, eſſe 826277 = 907. 911. Egregios vſus praeſtant in hoc labore tabulae numerorum primorum, quales dederunt *Schootenius* in *Exercitat. Mathem lib. V, ſect. V, p.* 394; et *Ozanamus* in *Recreations Mathem. Tome I, p.* 47; multo vero magis nos iuuant illae tabulae numerorum naturalium, in quibus ſingulis horum diuiſores ſunt adſcripti, qualis habetur in *Ioh. Mich. Poetii Arithmetica*, in fine libri, ſub titulo *Anatomiae numerorum*, adiecta. Sed dolendum eſt, haec adiumenta non longius eſſe extenſa quam ad 10000, in quibus adeo iam pro numero allegato 11339 nihil ſubſidii obtineri poteſt; deinde in easdem haſce tabulas vltimas aliquot errores irrepſerunt; ita 731 non eſt 17. 37, ſed 17. 43; 871 non eſt primus, ſed 13. 67; 1591 non eſt pri-

mus, ſed 37. 43; 6773 non eſt primus, ſed 13. 521; 9463, 9929, et 1289, non adſunt, qui tamen primi ſunt *Ozanamo* et *Schootenio*; 6497 non adeſt, $= 73 \cdot 89$.

§. 2. Nihil itaque vtilius in hoc negotio fieri poteſt, quam vt in generales numerorum formulas inquiramus, eruamusque quomodocunque, quosnam illae admittant diuiſores. Talem numerum generaliſſime expreſſum examinabo hac vice, tentaturus quae exinde Theoremata poſſint deduci. Sit is numerus generaliter ita ſcriptus $a^\alpha + b^\beta$, de quo inſtituam quaeſtionem, quibusnam in caſibus diuidi is queat per $a^\gamma + b^\delta$, ſi nempe per a, b, α, β, γ, δ, intelliguntur numeri integri, poſitiui. Inſtituta diuiſio Algebraica hunc tenebit typum:

$a^\gamma + b^\delta)\, a^\alpha + b^\beta$ Quot: $a^{\alpha-\gamma} - a^{\alpha-2\gamma}b^\delta + a^{\alpha-3\gamma}b^{2\delta} -$ etc.

$$a^\alpha + a^{\alpha-\gamma}b^\delta$$

reſid. 1. $-a^{\alpha-\gamma}b^\delta + b^\beta$

$$-a^{\alpha-\gamma}b^\delta - a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta}$$

reſid. 2. $+a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} + b^\beta$

$$+a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} + a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta}$$

reſid. 3. $-a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta} + b^\beta$

neque neceſſe eſt vt vlterius operatio continuetur, cum ex his iam tota lex ſeriei et reſiduorum abunde pateat.

§. 3. Sit enim in ſerie quoti, in infinitum excurrente, numerus termini cuiuslibet $= n$; atque erit terminus is ipſe talis, $\pm a^{\alpha-n\gamma}b^{(n-1)\delta}$; idem porro terminus erit poſitiuus, quoties cunque eſt n numerus impar; ſed erit negatiuus, ſi n fuerit numerus par. Deinde cuiuslibet termini reſiduum in diuiſione relictum erit huius formae:

+

$\mp a^{\alpha - n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta}$, atque prior quidem huius terminus erit poſitiuus, quoties n erit numerus par, negatiuus autem ſi impar.

§. 4. Vt itaque nunc diuiſio indicata inſtitui poſſit ad quotum finitum obtinendum, requiritur vt reſiduum prodeat nullum; ſtatuatur itaque ab initio hoc reſiduum poſitiuum nullum, atque erit $+ a^{\alpha - n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta} = 0$; hoc fieri poterit non aliter, quam ponendo $\alpha - n\gamma = 0$, ex quo fit reſiduum $b^{n\delta} + b^{\beta} = 0$, vel $b^{n\delta - \beta} = -1$; quod fieri nequit; ſi enim vel maxime aſſumamus $n\delta - \beta = 0$, prodibit $+1 = -1$, quod contradictorium eſt; nec alius numerus $n\delta - \beta$ fingi poteſt, ad quem eleuata quantitas b fiat $= -1$. Adeoque ex hoc caſu nihil ſperari poteſt.

§. 5. Sed melius ſuccedet res, ſi ſtatuamus reſiduum prodire cum ſigno negatiuo, quo caſu id erit $- a^{\alpha - n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta}$. Aſſumatur itaque hic $\alpha - n\gamma = 0$, vel $\alpha = n\gamma$, abibit illud in hanc formam, $- b^{n\delta} + b^{\beta}$, quae vt redigatur ad nihilum, ſit $n\delta = \beta$, ex quo idem reſiduum fiet $- b^{\beta} + b^{\beta} = 0$. Tum vero progreſſionis termini ſequentem formam induent, vt ſint iſti, $a^{\overline{n-1}\cdot\gamma} - a^{\overline{n-2}\cdot\gamma} b^{\delta} + a^{\overline{n-3}\cdot\gamma} b^{2\delta} - a^{\overline{n-4}\cdot\gamma} b^{3\delta} + a^{\overline{n-5}\cdot\gamma} b^{4\delta} -$ etc., quae ſeries neceſſario potentiam a^{n-4}, a^{n-5} etc. alicubi acquiret $= a^{0} = 1$, ſi n per determinatum numerum exprimatur; qui vero idem numerus n ſemper debet eſſe impar, (§. III.) vt nempe reſidui prius membrum fiat negatiuum, et reſiduum ipſum nullum. Vnde ergo iam conficitur, ſubſtitutis pro α et β valoribus inuentis, numerum hunc vniuerſalem $a^{n\gamma} + b^{n\delta}$ ſemper diuidi poſſe per $a^{\gamma} + b^{\delta}$, ſi modo n aſſumatur numerus impar; vel $\frac{a^{n\gamma} + b^{n\delta}}{a^{\gamma} + b^{\delta}}$ hoc caſu ſemper repraeſentare numerum integrum.

§. 6.

§. 6. Tentabimus nunc diuiſionem numeri vniuerſalis $a^\alpha - b^\beta$ per $a^\gamma - b^\delta$, in quo inſtituta diuiſio Algebraica iam hunc tenebit typum:

$$a^\gamma - b^\delta)\,a^\alpha - b^\beta \text{ Quot}: a^{\alpha-\gamma} + a^{\alpha-2\gamma}b^\delta + a^{\alpha-3\gamma}b^{2\delta} + \text{etc.}$$

$$a^\alpha - a^{\alpha-\gamma}b^\delta$$

$$\text{reſid. } 1.\, a^{\alpha-\gamma}b^\delta - b^\beta$$

$$a^{\alpha-\gamma}b^\delta - a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta}$$

$$\text{reſid. } 2.\, a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} - b^\beta$$

$$a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} - a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta}$$

$$\text{reſid. } 3.\, a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta} - b^\beta$$

vbi iterum facile perſpici poteſt, ſi ponatur numerus termini cuiuscunque in quoto n, eſſe eundem terminum $a^{\alpha-n\gamma}b^{\overline{n-1}\delta}$, et pro eodem eſſe reſiduum $a^{\alpha-n\gamma}b^{n\delta} - b^\beta$, neque hic occurrere ſignorum in reſiduo, aut in terminis quoti, varietatem, vti prius factum fuit. Vt ergo reſiduum fiat nihilum, poni debet $\alpha - n\gamma = 0$, aut $\alpha = n\gamma$; atque ſic orietur reſiduum tale $b^{n\delta} - b^\beta$, quod vt etiam annihiletur, ſtatuendum eſt $n\delta = \beta$, quibus ſubſtitutis clarum eſt, numerum $\frac{a^{n\gamma} - b^{n\delta}}{a^\gamma - b^\delta}$ ſemper eſſe integrum, ſiue n par ſit numerus, aut vero impar.

§. 7. Hinc iam deduco, eſſe quoque hunc numerum generalem $2^{4m-1} - 2^{2m} - 1$ ſemper diuiſibilem per 9, atque ita quidem, vt quotus ex diuiſione prodiens ſit numerus triangularis. Quod vt demonſtrem, aſſumam rem ita ſe habere, atque eſſe $\frac{2^{4m-1} - 2^{2m} - 1}{9} = \frac{x^2 + x}{2}$, qui generaliter eſt numerus triangularis; ex qua aequatione deducitur,

ducitur, radicem extrahendo, $\frac{2^{2m+1}-2}{3}=x$; vt igitur appareat eſſe x numerum integrum, qui, ſiue par ſit, ſiue impar, ſemper efficit quoque integrum $\frac{x^2+x}{2}$; conſiderabimus, eſſe $x=\frac{2^{2m+1}-2}{3}=\frac{2(2^{2m}-1)}{3}=\frac{2(4^m-1)}{4-1}$, qui integer eſt ex eo, quod continetur ſub formula generali modo adducta $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^\gamma-b^\delta}$ per 2 multiplicata, poſitis $a=4$, $n=m$, $\gamma=1$, $b=1$.

§. 8. Ex Theoremate priori (§. V.) ſtatim conſequitur, numerum a^n+1 diuiſibilem eſſe ſemper per $a+1$, poſito n numero impari. Abit enim formula generalis illa in hanc ſpecialiorem, ſi ſtatuatur $\gamma=1$, $\delta=0$. Pariter ex Theoremate altero (§. VI.) fluit, a^n-1 ſemper diuidi poſſe per $a-1$, ſiue par ſit n, aut impar; abit enim iterum formula vniuerſalis in hanc particularem, ſi fuerit $\gamma=1$, $\delta=0$. Quorum vtrumque ſuppoſuit *Celeberr. Eulerus* in acutiſſima Diſſertatione, *de Theoremate quodam Fermatiano*, *Commentar. Acad. Imper. Tomo VI. pag.* 103.

§. 9. Si in formula generali altera (§. VI.) $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^\gamma-b^\delta}$ fiant $a=2$, $n\gamma=m$, aut $\gamma=\frac{m}{n}$, $\delta=0$, abibit haec in talem expreſſionem $\frac{2^m-1}{2^{\frac{m}{n}}-1}$; erit igitur 2^m-1. Diuiſibilis per numerum $2^{\frac{m}{n}}-1$, quoties m fuerit numerus compoſitus, quia pro n aſſumere licet numerum quemcunque,

 parem

parem aut imparem. Quod ſi vero m fuerit numerus primus, vt ita nullus n detur, per quem diuidi queat m; tum videtur 2^m-1 nullum admittere diuiſorem, et conſequenter eſſe numerus primus; at vero male ita ratiocinamur; nam id ſolum ſequitur, 2^m-1 non admittere diuiſorem huius formae $2^{\frac{m}{n}}-1$; haud vero plane nullum, ſed forſan alium huius formae $m\alpha+1$. Ita exempli gratia $2^{11}-1$ diuiſibilis eſt per 23; $2^{23}-1$ per 47; $2^{29}-1$ per 1103; $2^{37}-1$ per 223; $2^{43}-1$ per 431; $2^{47}-1$ per 2351; $2^{73}-1$ per 439; $2^{83}-1$ per 167; quos diuiſores omnes vide in allegata Diſſertatione *Celeberr. Euleri*, excepto ſolo 2351, quem priuatim mecum communicauit anno demum 1741.

§. 10. Falſa haec perſuaſio, 2^m-1 eſſe numerum primum, quoties m talis ſit, in errorem praecipue abduxit *Celeb. Michael. Gottl. Hanſchium*, qui in *Epiſtola ad Mathematicos de Theoria Arithmetices nouis a ſe inuentis aucta*, *edita* 1739, viginti tales pro numeris primis aſſumſit, nempe hac tabella comprehenſos:

$2^{2}-1$	$2^{31}-1$
$2^{3}-1$	$2^{37}-1$
$2^{5}-1$	$2^{41}-1$
$2^{7}-1$	$2^{43}-1$
$2^{11}-1$	$2^{47}-1$
$2^{13}-1$	$2^{53}-1$
$2^{17}-1$	$2^{59}-1$
$2^{19}-1$	$2^{61}-1$
$2^{23}-1$	$2^{67}-1$
$2^{29}-1$	$2^{71}-1$

atque ex illis totidem numeros perfectos elici poſſe puta-

rit. Sed vti inter $2^{2}-1$ et $2^{53}-1$ ante iam ſex tales ſunt eliminati: ita de reliquis, $2^{53}-1$ vsque ad $2^{71}-1$, magnus dubitandi campus eſt, quot eorum ſint primi; vnde palam fit, nos hodie nondum de pluribus quam nouem numeris perfectis eſſe certos.

§. 11. Venit hic in mentem Theorema elegans *Illuſtris Goldbachii*, quod legitur in *Actor. Erudit. Lipſ. Supplementis Tomo VI*, *pag.* 471; nempae ſi numero quouis quadrato ſubtrahatur binarius, reſiduum nunquam diuidi poſſe per ternarium. Hoc exinde fit, quia numerorum quadratorum quorumuis, ordine naturali ſuccedentium, notae omnes ſimul additae faciunt has ſummas, 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9; redeunte ſemper eadem periodo, ſi fuerit abſoluta; vel quia quadratum quodcunque, diuiſum per 9, relinquit 1, aut 4, aut 7, aut 0; a quarum notarum ſummis ſingulis ſi ſubtrahas 2, remanent reſpectiue -1, 2, 7, 5, 5, 7, 2, -1, 7, vbi nullus ternarius prodit, qui alias indicio eſt, numerum propoſitum per 3 eſſe diuiſibilem. Idem etiam verum eſt, ſi a quadrato ſubtrahas 5, aut 8. Ex his ſolui iam poteſt ingenioſum Problema, quod in *loco modo citato* adiunctum eſt, *dato numero quocunque ita mutare notam vnicam, vt certum ſit, numerum ita mutatum per omnes tranſpoſitiones poſſibiles non exhibere quadratum.* Praxis ſine dubio talis eſſe debet, vt a numero propoſito ſubtrahatur 2, ac deinde reſiduum, mutata quauis nota, excepta vltima quae ad dextram eſt, ita adornetur vt diuidi poſſit per 3, quod multis quidem modis, et facile, fit. In hac vero praxi annotandum eſt *primo*, numerum propoſitum non poſſe eſſe quemcunque, ſed ta-

P 2 lem,

lem, qui ex permutatione notarum in quadratum abire queat; aliter enim per eandem hanc operationem ipſam incidere in quadratum poſſumus. Veluti ſi aſſumamus numerum 1677, qui nulla notarum tranſpoſitione quadratus fit, is ſubtracto 2 fit 1675 non diuiſibilis per 3; ſi igitur ad hoc obtinendum mutarem 5 in 4, aut 7 in 6, emergerent numeri 1674 et 1665, diuiſibiles per 3, ſed vterque per tranſpoſitionem notarum quadratus, ſcilicet 1764, et 6561. Problema igitur de ſolo tali numero intelligendum eſt, qui per tranſpoſitionem notarum ſuarum quadratus fieri poſſet; hoc eſt, qui abiectis nouenariis relinquit vel 0, 1, 4, 7. *Secundo* propoſiti talis numeri debent mutari notae duae; vna ſubtracto 2, et haec extima quidem ad dextram; altera autem intermedia, vt reſiduum hoc fiat diuiſibile per 3. Nam ſi aſſumerem exempli gratia numerum 1489, qui quadratus eſt his ipſis notis ita ſcriptis 1849, atque ab illo ſubtraherem 2, vt fiat 1487, et tum notam vltimam mutarem in 5, vt oriatur multiplum 3, obtinerem ſic 1485, qui quadratus fit notis in 5184 tranſpoſitis.

§. 12. Sed dolendum eſt, parum auxilii trahi poſſe ex praecedentibus formulis ad indagandum numeri alicuius dati diuiſorem. Liceat igitur tentare aliam adhuc viam, quae aliquanto plus ſubſidii nobis ſubminiſtrabit. Quamuis deſtituatur Arithmetica tali formula generali vnica, quae numeros primos omnes ſucceſſiue exhibeat: certum tamen eſt, omnes illos contineri his duabus; nempe omnis numerus primus eſt vel $6m+1$, vel $6m+5$. Omnis enim numerus, per 6 diuiſus, relinquit vel 0, 1, 2, 3, 4, 5, adeoque omnes numeri in genere

conti-

continentur his faciebus $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, et $6m+5$; ſed inter hos primi nequeunt eſſe $6m$, $6m+2$, $6m+3$, et $6m+4$; ſupererunt ergo primi ſoli aut $6m+1$, aut $6m+5$; quod eſt Theorema *Leibnitii* in *Journal des Savans*, *Tomo VI*, *p.* 76; quo tamen inductus falſum primum numerum ſtatuit 1007, qui eſt 19×53. Aut eadem ratione demonſtrare potuiſſet, omnes numeros primos eſſe vel $3m+1$, vel $3m+2$; aut vero $2m+1$; quamuis haec propoſitio nequeat inuerti. Multiplicentur ergo duo hi primi, ſi modo tales fuerint, $6m+1$, et $6n+1$, inter ſe mutuo, obtinebitur factum $\overline{6m+1}\cdot 6n+6m+1$, quod iam admittet duos indicatos diuiſores, et, ſi numerus aliquis propoſitus dicatur A, eruetur exinde *Regula I.* haec $\frac{A-1-6m}{(6m+1)6} = n$. Multiplicentur porro ſecum $6m+5$, et $6n+5$, orietur $\overline{6m+5}\cdot 6n+30m+25 = A$, aut vero *Regula II.* $\frac{A-25-30m}{(6m+5)6} = n$. Tertio multiplicentur ſecum $6m+5$, et $6n+1$, obtinebitur $\overline{6m+5}\cdot 6n+6m+5 = A$, vnde fluit *Regula III.* $\frac{A-5-6m}{(6m+5)6} = n$.

§. 13. Iam vt exemplis aliquot doceam, quomodo hoc aliquali ſubſidio diuiſorem expiſcari poſſimus: ſtatuam, numerum propoſitum eſſe $1219 = A$; adhibendo nunc vnam regulam poſt alteram, erit ex I. $\frac{1218-6m}{(6m+1)6} = n$, vbi video, deprimi poſſe hanc fractionem, diuidendo ſupra et infra per 6, vnde prodit $\frac{203-m}{6m+1} = n$, atque ſic indagatio eo recurrit, qualis numerus debeat eſſe m, vt $203-m$ diuidi queat per $6m+1$. Huic fini commode adhibentur ſeries hoc typo adornandae, quod haud

difficulter fit, cum lex progreſſionis ſtatim in oculos incurrat:

m - - - - -	1	2	3	4	5	6	28
$203 - m$ - -	202	201	200	199	198	197	175
$6m + 1$ - -	7	13	19	25	31	37	169

Facile iam diiudicari, aut tentari, poteſt, ſi aliquis numerus ſuperior $203 - m$ occurrat, qui per ſuum inferiorem ſit diuiſibilis; extendi autem ſeries debet eousque, donec $203 - m = 6m + 1$, aut hoc caſu vltimum m erit 28. Deprehenditur autem hic nullam diuiſionem ſuccedere.

§. 14. Igitur accedendum erit ad Regulam II, ex qua hoc caſu erit $\frac{1194 - 30m}{(6m+5)6} = n$, aut iterum deprimendo hanc fractionem per 6, quod, quotiescunque fieri poteſt, maximum affert adiumentum, $\frac{199 - 5m}{6m+5} = n$. Series igitur adornandae erunt hae:

m - - - - -	1	2	3	4	5	6
$5m$ - - - -	5	10	15	20	25	30
$199 - 5m$ - -	194	189	184	179	174	169
$6m + 5$ - -	11	17	23	29	35	41

atque deprehendo diuiſionem ſuccedere inter 184 et 23, prodeunte quoto 8, erunt ergo $m = 3$, $n = 8$, et diuiſores quaeſiti $6m + 5 = 23$, et $6n + 5 = 53$. Quod vero ſi factum non fuiſſet, tum adeunda fuiſſet Regula III; quae ſi nullum quoque ſubminiſtraret diuiſorem, numerus propoſitus eſſet primus.

§. 15. Sit quaerendus diuiſor numeri $6631 = A$; erit ex Regula I. $\frac{6630 - 6m}{(6m+1)6} = n$, vel, facta depreſſione per 6, habebitur $\frac{1105 - m}{6m+1} = n$, vnde ſeries ita conſtituuntur:

m - -

m - - - - - -	1	2	3	4	5
$1105-m$ - - -	1104	1103	1102	1101	1100
$6m+1$ - -	7	13	19	25	31

et video diuiſionem perfici poſſe ſub $m=3$, ipſius 1102 per 19, prodeunte quoto $58=n$, ergo diuiſor vnus erit $6m+1=19$, atque alter $6n+1=349$.

§. 16. Aliud quid tentaui adhuc in hoc negotio, quod quamuis irritum fuerit, commemorabo tamen, vt alii ne fruſtra hinc remedium quaerant. Omnia multipla numeri primi exempli gratia 23, habent ſummam notarum comprehenſam in hac periodo, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, vel, quod idem eſt, ſucceſſiue diuiſa per 9, hos numeros relinquunt. Sic etiam omnia multipla numeri primi 2011 habent ſummam notarum contentam in hac periodo, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9. Sit itaque examinandus numerus 67813, an is per 2011 ſit diuiſibilis. Propoſito numero addo ter aut quater 2011, et video harum ſummarum notas additas ſibi producere 7, 2, 6, 1; qui eſt ordo talis, qualis in periodo multiplorum 2011 occurrit. Videri itaque poſſet ex hoc, numerum propoſitum per 2011 eſſe diuiſibilem, quod tamen minime fit. Attendi enim hic debet ad illud, per additionem numeri eiusdem 2011, ad alteram 67813 repetitam, notarum ſummas ſemper ita conformari, ac ſi haberetur multiplum ipſius 2011. Sit enim exempli gratia numerus par 2A, cuius ſumma notarum ſit 6, adeoque ipſe $9m+6$; atque apparet, ipſum hunc numerum raro diuidi poſſe per 23. Simulabo tamen, me velle tentare, an dictus numerus 2A ſit diuiſibilis per 23, faciamque hoc ſequenti typo:

Summa

Summa notarum		numeri
6	- - - - -	2A
		23
2	- - - - -	2A+23
		23
7	- - - - -	2A+46
		23
3	- - - - -	2A+69
		23
8	- - - - -	2A+92
		23
4	- - - - -	2A+115
		23
9	- - - - -	2A+138

atque video ſic prodire periodum illam, quae pro multiplis 23 obtinet, quamuis tale multiplum 2A ſemper non ſit.

§. 17. perſequar itaque Theoremata quaedam huc ſpectantia, quae vlteriori diuiſorum inquiſitioni inſeruire poſſunt. Si in formula $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^{\gamma}-b^{\delta}}$ (§. VI.) ſtatuamus $a=2$, $\delta=0$, mutabitur illa in hanc $\frac{2^{n\gamma}-1}{2^{\gamma}-1}$; eſt itaque binarius ad numerum compoſitum quemcunque $n\gamma$ eleuatus, et vnitate minutus ſemper diuiſibilis per $2^{\gamma}-1$, vbi indifferens eſt, ſiue n ſit par, ſiue impar. Si vero in altera formula (§. V.) $\frac{a^{n\gamma}+b^{n\delta}}{a^{\gamma}+b^{\delta}}$ ponamus $a=2$, $\delta=0$,

mutatur

mutatur illa in hanc $\frac{2^{n\gamma}+1}{2^{\gamma}+1}$, vnde patet, binarium eleuatum ad numerum compoſitum $n\gamma$, et deinde vnitate auctum, diuiſibilem eſſe quidem per $2^{\gamma}+1$, ſed requiri vt n ſit impar. Si autem in formula $\frac{2^{n\gamma}-1}{2^{\gamma}-1}$ exponens ipſius 2 non ſit compoſitus ſed primus numerus, ob allegatam conditionem, diuiſio non ſuccedit. Graue igitur eſt, hoc nos inuento adhuc deſtitui, vt, poſito numero primo p, ſciamus quibus in caſibus $2^{p}-1$ diuiſorem admittat vel non. Interim tamen quoniam, vti ante vidimus, (§. IX.)

$2^{11}-1$	diuiſibilis eſt per	23	$= 2.\ 11+1$
$2^{23}-1$	- - - - -	47	$= 2.\ 23+1$
$2^{29}-1$	- - - -	1103	$= 2.\ 19.\ 29+1$
$2^{37}-1$	- - - -	223	$= 2.\ 3.\ 37+1$
$2^{43}-1$	- - - -	431	$= 2.\ 5.\ 43+1$
$2^{47}-1$	- - - -	2351	$= 2.\ 5^{2}.\ 47+1$
$2^{73}-1$	- - - -	439	$= 2.\ 3.\ 73+1$
$2^{83}-1$	- - - -	167	$= 2.\ 83+1$

ex analogia concludere licet, numerum $2^{p}-1$, ſi fuerit diuiſibilis, admittere diuiſorem huius formae $2.\,q^{m}p+1$, aſſumto etiam q primo.

§. 18. Porro etiam, quod neſcio an hucusque obſeruatum fuerit, ſi p ſit primus, erit $2^{p}-2$ ſemper diuiſibilis per p. Veluti exempli gratia $2^{37}-2$ diuiſorem recipit 37. Quod vt demonſtrem, notum eſt, ex methodo

 Newtoni

Newtoni eſſe $2^p = \overline{1+1}^p = 1 + p + \frac{p.\overline{p-1}}{1.\ 2} + \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}}{1.\ 2.\ 3}$ $+ \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}.\overline{p-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$ + etc. in qua ſerie, ſi p fuerit numerus determinatus, euadet terminus vltimus $= 0$, ob numeros naturales omnes, et conſequenter etiam primos, ſucceſſiue a p ſubtractos; ſed hoc pacto terminus penultimus euadet 1, et termini intermedii diuidi quidem poterunt per 2, $2.\ 3$, $2.\ 3.\ 4$, etc. ſed nullus horum diuiſorum quadrabit in p, ob hunc primum; ergo in caſu particulari ſeries acquiret hanc faciem $2^p = 1 + p + p\alpha + p\beta + p\beta + p\alpha + p + 1 + 0$, ex qua fit $2^p - 2 = p(2 + 2\alpha + 2\beta)$, et conſequenter $\frac{2^p - 2}{p} = 2 + 2\alpha + 2\beta$, numero integro, et pari.

§. 19. Memini *Celeberrimum Eulerum* aliquando communicaſſe mecum, numerum talem vniuerſalem $a + 1 \pm \sqrt{2a-m}$ nunquam diuidi poſſe per m. Huius demonſtratio haec nunc mihi ſuccurrit. Ponam eſſe m diuiſorem, et quotum prodentem b, erit ſic $a + 1 \pm \sqrt{2a-m} = bm$. Vt auferatur irrationalitas, ſumatur $\sqrt{2a-m} = e$, vnde eſt $a = \frac{e^2 + m}{2}$, $a + 1 = \frac{e^2 + m + 2}{2}$, quae ſubſtituta numerum vniuerſalem propoſitum reddunt hunc $\frac{e^2 + m + 2 \pm 2e}{2}$, vel hunc, in paullo mutatam formam redactum,

$e^2 +$

$\frac{e^2+2e+1+m+1}{2} = \frac{\overline{e+1}^2}{2} + \frac{m+1}{2}$. Si itaque numerus propoſitus diuiſibilis eſſet per m, tum foret $\frac{\overline{e+1}^2}{2m} + \frac{m+1}{2m}$ numerus integer, nempe b. At vero hoc fieri nequit; nam aut e debet eſſe multiplum ipſius $2m$, aut $e+1$; ſi illud ſit, tum erit $e=2m\alpha$, $e+1 = 2m\alpha+1$, $\overline{e+1}^2 = 4m^2\alpha^2+4m\alpha+1$, quod per $2m$ diuiſum relinquit reſiduum $\frac{1}{2m}$, ſed hoc coniunctum cum $\frac{m+1}{2m}$ reddit $\frac{m+2}{2m}$, quae ſemper fractio eſt ob $2m>m+2$, ſi modo $m>2$. Si vero $e+1$ ſit multiplum ipſius $2m$, vti $e+1 = 2m\alpha$, erit $\overline{e+1}^2 = 4m^2\alpha^2$, adeoque $\frac{\overline{e+1}^2}{2m} = 2m\alpha^2$, ſed tunc $\frac{m+1}{2m}$ manebit fractio adiuncta integro $2m\alpha^2$, quia ſemper $2m>m+1$, ſi modo $m>1$. Sequitur autem ex his, $a+1+\sqrt{2a-m}$ eſſe tamen diuiſibile per m, ſi fuerit $m=2$, et $a=3, 9, 19, 33$, etc.

§. 20. Ex eadem hac conſideratione, quod nempe $\frac{m+1}{2m}$ immo generaliter $\frac{\alpha+1}{\alpha+m}$, ſemper ſit fractus, ob $\alpha+m>\alpha+1$, plurima alia condi poſſunt Theoremata de numeris per alios non diuiſibilibus. Veluti quoniam $\frac{2^p-2}{p}$ ſemper eſt integer, poſito p primo, conſequi-

tur eſſe $\frac{2^p - 2}{p} + \frac{\alpha + 1}{\alpha + m}$ ſemper integrum cum adiuncta fractione, hoc eſt, ſi reducatur haec formula, numerus generalis $\overline{\alpha + m}.2^p + \overline{\alpha + 1}.p - 2.\overline{\alpha + m}$ nunquam diuidi ſe patitur per $\overline{\alpha + m}.p$, ſi, praeter primum p, α et m ſint numeri qualescunque integri, poſitiui.

DE

DE PARTITIONE NVMERORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Problema *de partitione numerorum* primum mihi eſt propoſitum a *Celeb. Profeſſore Haude*, in quo quaerebat, quot variis modis datus numerus integer, (hic enim perpetuo de numeris tantum integris et affirmatiuis eſt ſermo,) poſſit eſſe aggregatum, duorum vel trium vel quatuor, vel in genere quot libuerit numerorum. Siue quod eodem redit, quaeritur, quot variis modis datus numerus vel in duas, vel tres, vel quatuor, vel quot libuerit partes diſpertiri queat, vnde huic Problemati aptiſſime *partionis numerorum* nomen eſt impoſitum. Bipartitum autem hoc Problema a *Viro Celeb*: proponi ſolet: primo ſcilicet eos tantum partitionis modos poſtulat, quibus ſingulae partes, in quas numerus propoſitus reſoluitur, ſint inter ſe inaequales; tum vero hac inaequalitatis conditione omiſſa omnes omnino partitionis modos requirit, ſiue partes quaepiam inter ſe fuerint aequales, ſiue omnes inaequales. Perſpicuum autem eſt, hoc poſteriori caſu numerum partitionum plerumque multo eſſe maiorem, quam priori, cum non ſolum omnes partitiones, quae caſui priori ſatisfaciunt, ſimul poſteriorem reſoluant, ſed etiam plerumque plures alii accedant, in quibus partes aequales continentur.

§. 2. Vt vis Problematis huius clarius perſpiciatur, non nullos caſus ſimpliciores, qui actuali partitionum enumeratione facile expediuntur. Si quaeratur, quot variis modis numerus 6. in duas partes reſolui poſſit, ſtatim apparet, hoc tribus modis fieri poſſe, cum ſit:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$$

ſi quidem partium aequalitas non excludatur. Sin autem partes tantum inaequales deſiderentur, vltima partitio $3 + 3$ eſt omittenda, hocque caſu numerus 6 duobus tantum modis in duas partes inter ſe inaequales diſpertiri poteſt. Quod ſi numerus impar, vti 9 proponatur, in duas partes diſtribuendus, quatuor prodibunt partitiones, quae ſunt:

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

vbi cum partes aequales non occurrant, numerus 9 quatuor modis in duas partes diſpertietur, ſiue partes aequales excludantur, ſiue ſecus. Si plures duabus partes deſiderentur, vti ſi quaeratur, quot variis modis numerus 12. in tres partes diſpertiri poſſit, hoc ſequentibus 12. modis fieri poterit:

$$12 = 1 + 1 + 10;\quad 12 = 1 + 2 + 9;\quad 12 = 1 + 3 + 8$$
$$12 = 1 + 4 + 7;\quad 12 = 1 + 5 + 6;\quad 12 = 2 + 2 + 8$$
$$12 = 2 + 3 + 7;\quad 12 = 2 + 4 + 6;\quad 12 = 2 + 5 + 5$$
$$12 = 3 + 2 + 6;\quad 11 = 2 + 4 + 5;\quad 12 = 4 + 4 + 4$$

Sin autem partes aequales excludantur, reſpondendum erit, numerum 12. tantum 7. modis in tres partes diſtribui poſſe.

§. 3. Hinc facile intelligitur, ſi tam numerus diſpertiendus fuerit maior, atque numerus partium, in quas eum reſolui oportet, ternarium quaternariumue ſuperet, nume-

numerum partitionum tam fieri magnum, vt per enumerationem actu inſtituendam difficillime obtineri queat. Neque etiam in hoc negotio inductioni multum eſt fidendum, quae, vti periculum facienti facile patebit, plerumque fallit, ſi ab enumeratione pro caſibus ſimplicioribus facta ad magis compoſitos concluſiones formare voluerit. Sic ex methodo poſt explicanda patebit numerum 50 in ſeptem partes non excluſa partium aequalitate diſpertiri poſſe 8946 modis; ſin autem partes aequales excludantur, remanebunt tantum 522 partitiones. Numerus porro 42 mille diuerſis modis in 20 partes omnino reſolui poteſt. At ſi quaeratur, quot variis modis numerus 125 in 12 partes, quae ſint inter ſe omnes inaequales diſtribui poſſit, reperietur hoc fieri poſſe 64707 modis.

§. 4. Quemadmodum hic omnes numeri integri partium loca tenere poſſunt, ita hoc Problema in infinitum variari poteſt, prout numeri partes conſtituentes reſtringuntur. Ita aliud erit Problema, ſi quaeratur, quot variis modis datus numerus *n* in *p* partes, quarum nulla datum numerum *m* excedat, reſolui poſſit. Partium quoque numerus omitti poteſt, vti ſi quaeratur, quot variis modis numerus 6 ex his numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci poſſit, quod ſequentibus 9 modis fieri poterit:

$6 = 1+1+1+1+1+1$	$6 = 1+1+1+3$
$6 = 1+1+1+1+2$	$6 = 1+1+4$
$6 = 1+1+2+2$	$6 = 1+2+3$
$6 = 2+2+2$	$6 = 2+4$
	$6 = 3+3$

Vel

Vel etiam qualitas numerorum praeſcribi poteſt, qui partes conſtituant; vti ſi partes debeant eſſe vel numeri impares, vel quadrati, vel tringulares, vel alius cuiusque generis. Sic ſi quaeratur, quot variis modis datus numerus poſſit eſſe ſumma quatuor quadratorum, quaeſtio ad hoc genus pertinebit. Iam pridem quoque partitio numerorum omnium in partes, quae ſint termini huius progreſſionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. eſt conſiderata, et quilibet numerus obſeruatus eſt vnico tantum modo ex his numeris 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. per additionem componi poſſe. Cuius quaeſtionis poſt *Stifelium* mentionem facit *Scotenius* in ſuis *Exercitationibus*, vbi oſtendit pondera 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. librarum ſufficere poſſe ad merces quotcunque librarum ponderandas. Neque vero ad hoc oſtendendum alia methodo praeter inductionem vtitur. Quam ob rem non abs re erit veritatem huius effati rigoroſe demonſtraſſe.

§. 5. Quem ad modum ergo haec aliaque ſimilia Problemata reſolui oporteat, hic eiusmodi methodum certam ac tutam proponam, vt inductione, cui vulgo ad ſolutionem iſtius modi quaeſtionum plurimum tribui ſolet, plane non ſit opus. Vtor ad hoc ſequenti Lemmate potiſſimo:

Si iſtud productum $(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)$ *etc. ſiue factorum numerus ſit finitus, ſiue infinitus, per actualem multiplicationem euoluatur, vt huiusmodi forma prodeat:*

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{ etc.}$$

erit coefficiens ſecundi termini A *ſumma quantitatum omnium* a, b, c, d, e, etc. *Coefficiens vero* B *erit ſumma*

ma productorum ex binis harum quantitatum inaequalium. Coefficiens C *erit ſumma productorum ex ternis iſtarum quantitatum inaequalibus*; *et coefficiens* D *erit ſumma productorum ex quaternis harum earumdem quantitatum*, *et ita porro*. In huiusmodi enim productis eadem quantitas puta *a*, vel quaeuis alia plus quam ſemel nusquam ineſſe poteſt. Vnde hoc Lemma mihi fundamentum ſuppeditat ad partitiones in partes inaequales.

§. 6. Sin autem aequalitas partium non excludatur, adhibeo hoc Lemma:

Si iſta formula $\frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)}$ *etc. factorum*, *ſiue denominatorem conſtituentium numerus ſit finitus*, *ſiue infinitus*, *poſt euolutionem denominatoris ope multiplicationis factum*, *per diuiſionem in ſeriem explicetur huius formae*:

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{ etc.}$$

tum erit A *quidem vt ante ſumma quantitatum* a+b+c+d+e+ etc. *At coefficiens* B *erit ſumma productorum ex binis harum quantitatum*, *non excluſa repetitione eiusdem quantitatis*, *erit ſcilicet*:

$B=aa+ab+bb+ac+bc+cc+ad+bd+cd+dd+ae+$etc.

Simili modo coefficiens C *erit ſumma productorum ex ternis harum quantitatum*; a, b, c, d, e, etc. *factoribus aequalibus in quouis producto non excluſis. Atque eadem conditione adiecta erit coefficiens* D *ſumma productorum ex quaternis harum quantitatum*, *et ita porro.*

Hincque iſtud Lemma viam aperiet ad partitiones, in quibus partium aequalitas non excluditur, abſoluendas.

§. 7. Cum autem in Problemate propoſito non de productis, ſed de ſummis numerorum, quaeſtio inſtituatur,

 loco

loco quantitatum a, b, c, d, e, etc. ſubſtituo poteſtates x^p, x^q, x^r, x^s, x^t, etc. Sic enim in productis ex binis eiusmodi occurrent poteſtates, quarum exponentes ſint ſummae binarum ex ſerie p, q, r, s, t, etc. Simili modo producta ex ternis conſtantibus eiusmodi poteſtatibus, quarum exponentes ſint ſummae trium numerorum ex eadem ſerie p, q, r, s, etc. Atque producta ex quaternis erunt poteſtates, quarum exponentes ſint aggregata ex quaternis horum numerorum, et ita porro. Sicque quae ante de productis ſunt notata, nunc ad ſummas transferuntur; et ita quidem, vt, ſi Lemma prius adhibeatur, ſummae ex partibus tantum inaequalibus conflentur, ſin autem Lemma poſterius in vſum vocetur, partium aequalitas non excludatur. Hoc igitur modo ambo Lemmata ad ſolutionem quaeſtionum ante memoratarum accommodari debebunt.

§. 8. Aggrediamur ergo hanc primum quaeſtionem. *Inuenire quot variis modis datus numerus* N *poſſit diſpertiri in* p, *partes*, *quae ſint inter ſe inaequales*.

Quoniam huc omnes numeri integri affirmatiui ad partes conſtituendas ſunt idonei, pro ſerie ſuperiorum exponentium accipienda eſt ſeries numerorum naturalium: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Formetur ergo ſecundum Lemma prius haec expreſſio:

$s = (1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z)(1 + x^4 z)(1 + x^5 z)$ etc.

in infinitum, quae multiplicatione actu inſtituta euoluatur in hanc ſeriem:

$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 +$ etc.

eritque: $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ etc.

quod

quod eſt aggregatum omnium poteſtatum ipſius x. Deinde quia B eſt ſumma productorum ex binis terminis inaequalibus ſeriei A, erit B ſumma poteſtatum ipſius x omnium, quarum exponentes ſint aggregata duorum numerorum inaequalium: et cum eadem poteſtas ſaepius reſultare poſſit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea poteſtas modis ſit productum ex duobus terminis ſeriei A; ſeu quot variis modis eius exponens poſſit eſſe ſumma duorum numerorum inaequalium. Binis autem terminis ſeriei A re ipſa multiplicandis reperietur:

$$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \text{etc.}$$

Cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in duas partes inaequales diſpertiri poſſit. Hac igitur ſerie in infinitum continuata, ope legis poſt eruendae, reſoluitur Problematis propoſiti caſus, quo partitio in duas partes requiritur.

§. 9. Quantitas deinde C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur ternis terminis inaequalibus ſeriei A inuicem multiplicandis, conſtabit ex ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſunt ſummae trium numerorum inter ſe inaequalium. Atque eadem poteſtas toties in iſta ſerie C occurret, quoties eius exponens ex tribus numeris inter ſe inaequalibus per additionem reſultare poterit, reperieturque:

$$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + \text{etc.}$$

Cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in tres partes inaequales diſpertiri poſſit, ſic ex termino $8x^{13}$ colligitur, numerum 13 octo diuerſis modis in tres partes inaequales ſecari poſſe, quae ſunt:

$13 = 1 + 2 + 10$	$13 = 2 + 3 + 8$
$13 = 1 + 3 + 9$	$13 = 2 + 4 + 7$
$13 = 1 + 4 + 8$	$13 = 2 + 5 + 6$
$13 = 1 + 5 + 7$	$13 = 3 + 4 + 6$

Iſta igitur ſeries C in infinitum continuata inſeruiet omnibus numeris in tres partes inaequales diſpertiendis.

§. 10. Quantitas porro D, cum contineat omnia producta ex quaternis terminis inaequalibus ſeriei: $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 +$ etc. conſtabit ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſint aggregata quatuor numerorum inter ſe inaequalium; et in hac ſerie quaelibet poteſtas eiusmodi habebit coefficientem, qui indicat, quot variis modis eius exponens per additionem quatuor numerorum inter ſe inaequalium reſultare poſſit. Reperietur autem:

$$D = x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + \text{etc.}$$

Haec igitur ſeries in infinitum continuata oſtendet, quot variis modis quisque numerus poſſit eſſe ſumma quatuor numerorum inaequalium. Ex termino quippe $9x^{16}$ cognoſcitur numerum 16 nouem modis in quatuor partes inter ſe inaequales diſtribui poſſe.

§. 11. Si hoc modo vlterius progrediamur, patebit litteram E fore ſeriem poteſtatum ipſius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipſius x in quinque partes inaequales diſſecari poſſit. Erit autem:

$$E = x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + \text{etc.}$$

Simili modo valor litterae F erit ſeries partitionibus in ſex partes inaequales inſeruiens, et litterae G, H, I, etc. pro

pro partitionibus in partes ſeptem, octo, nouem etc. valebunt, eruntque:

$$F = x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + \text{etc.}$$

$$G = x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + \text{etc.}$$

etc.

Vnde perſpicitur primi cuiusque ſeriei termini exponentem eſſe numerum trigonalem numeri partium propoſiti: tum vero tam huius, quam ſecundi termini coefficientem eſſe $= 1$. Cuius quidem ratio facile intelligitur: minimus enim numerus, qui eſt ſumma ſeptem numerorum inter ſe inaequalium, neceſſario eſt $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1}{2} 7 . 8 =$ numero trigonali ipſius ſeptenarii: hicque numerus pariter ac ſequens vnitate maior plus vno modo in ſeptem partes inaequales diſpertiri nequit.

§. 12. Totum ergo negotium redit ad commodam ſerierum B, C, D, E, F, etc. formationem, ne id ipſum, quod quaeritur, ſcilicet partitionum numerus ad cuiusque ſeriei formationem adhibeatur. Ac primo quidem lex progreſſionum A et B eſt aperta, cum prioris coefficientes ſint omnes vnitates, poſterioris vero termini ſeriei numerorum naturalium geminati: ſequentium vero ſerierum lex minus eſt aperta, et quousque eas hic continuauimus, coefficientes ex ipſis cuiusque exponentis partitionibus conſtituimus. Alio itaque modo valores iſtarum litterarum A, B, C, D, etc. inueſtigari oportet, vnde haec exoritur quaeſtio: Inuenire valores litterarum A, B, C, D, E, etc. ita vt ſumma huius ſeriei:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

aequalis fiat iſti expreſſioni:

$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$ etc.

Hunc in finem igitur perpendendus eſt nexus, qui inter has duas expreſſiones intercedit, et quem ad modum altera immutari debeat, ſi in altera mutatio inſtituatur.

§. 13. Quia vtriusque expreſſionis idem eſt valor s, ambae inter ſe manebunt aequales, ſi in vtraque loco z ſcribatur quaecunque alia quantitas. Ponamus igitur in vtraque xz loco z, et valor vtrinque reſultans vocetur $= t$, eritque primo:

$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 +$ etc.

tum vero altera expreſſio transmutabitur in hanc:

$t = (1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$ etc.

qui poſterior ipſius t valor, ſi cum poſteriore valore ipſius s comparetur, quo erat:

$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)$ etc.

mox patebit eſſe $s = (1+xz)t$. Quae relatio cum etiam in alteris valoribus ipſarum s et t locum habere debeat, nobis praebebit hanc aequationem:

$$\begin{aligned} s &= 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.} \\ \hline (1+xz)\,t &= 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + \text{etc.} \\ &\quad + xz + Ax^2z^2 + Bx^3z^3 + Cx^4z^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Vnde terminis homogeneis inter ſe aequandis, fiet:

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$C = \frac{Bx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1-x^5} = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

etc.

§. 14.

§. 14. Series ergo, quae ſupra pro litteris A, B, C, D, E, etc. prodire obſeruatae ſunt, oriuntur ex euolutione fractionum, quas hic inuenimus, vnde conſtat, ſeriem A eſſe Geometricam, nempe $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc. quae, quod quidem eſt planiſſimum, indicat quemque numerum vnico modo ex vno numero integro conſtare. Reliquae vero ſeries B, C, D, E, etc. ſunt recurrentes, quarum ſcala relationis ex cuiusuis fractionis denominatore per multiplicationem euoluto patebit. Ad hoc oſtendendum negligamus tantiſper numeratores, qui ſunt poteſtates ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri trigonales, earumque loco ſcribamus vnitatem. Sit igitur.

$$\frac{A}{x} = 1 + \alpha' x + \beta' x^2 + \gamma' x^3 + \delta' x^4 + \varepsilon' x^5 + \ldots + v' x^n = \mathfrak{A}$$
$$\frac{B}{x^3} = 1 + \alpha'' x + \beta'' x^2 + \gamma'' x^3 + \delta'' x^4 + \varepsilon'' x^5 + \ldots + v'' x^n = \mathfrak{B}$$
$$\frac{C}{x^6} = 1 + \alpha''' x + \beta''' x^2 + \gamma''' x^3 + \delta''' x^4 + \varepsilon''' x^5 + \ldots + v''' x^n = \mathfrak{C}$$
$$\frac{D}{x^{10}} = 1 + \alpha^{IV} x + \beta^{IV} x^2 + \gamma^{IV} x^3 + \delta^{IV} x^4 + \varepsilon^{IV} x^5 + \ldots + v^{IV} x^n = \mathfrak{D}$$
$$\frac{E}{x^{15}} = 1 + \alpha^{V} x + \beta^{V} x^2 + \gamma^{V} x^3 + \delta^{V} x^4 + \varepsilon^{V} x^5 + \ldots + v^{V} x^n = \mathfrak{E}$$
$$\frac{F}{x^{21}} = 1 + \alpha^{VI} x + \beta^{VI} x^2 + \gamma^{VI} x^3 + \delta^{VI} x^4 + \varepsilon^{VI} x^5 + \ldots + v^{VI} x^n = \mathfrak{F}$$

etc.

15. Solutio ergo quaeſtionis ad inuentionem ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. reducitur, quas patet ſingulas eſſe recurrentes. Ac primo quidem ſeries $\mathfrak{A}$, cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, eſt adeo Geometrica, atque $\alpha' = 1$, $\beta' = 1$, $\gamma' = 1$, $\delta' = 1$, etc. quod per ſe eſt perſpicuum. Series autem $\mathfrak{B}$, cum ſit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$, erit recurrens, ſcala relationis exiſtente $+1$, $+1$, -1; Vnde erit:

$\alpha'' =$

$$\alpha'' = 1,$$
$$\beta'' = \alpha'' + 1$$
$$\gamma'' = \beta'' + \alpha'' - 1$$
$$\delta'' = \gamma'' + \beta'' - \alpha''$$
$$\varepsilon'' = \delta'' + \gamma'' - \beta''$$
$$\zeta'' = \varepsilon'' + \delta'' - \gamma''$$
etc.

Simili modo ſeries $\mathfrak{C}$ ob $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$ erit recurrens et ſcalam relationis habebit $+1$, $+1$, 0, -1, -1, $+1$. Vnde erit:

$$\alpha''' = 1$$
$$\beta''' = \alpha''' + 1$$
$$\gamma''' = \beta''' + \alpha''' + *$$
$$\delta''' = \gamma''' + \beta''' + * - 1$$
$$\varepsilon''' = \delta''' + \gamma''' + * - \alpha''' - 1$$
$$\zeta''' = \varepsilon''' + \delta''' + * - \beta''' - \alpha''' + 1$$
$$\eta''' = \zeta''' + \varepsilon''' + * - \gamma''' - \beta''' + \alpha'''$$
$$\theta''' = \eta''' + \varepsilon''' + * - \delta''' - \gamma''' + \beta'''$$
etc.

Eodem modo ſeries ſequentes perſpicientur eſſe recurrentes, ſingularumque ſcalae relationis hoc modo aſſignari poterunt. Etſi autem hoc pacto iſtae ſeries non difficulter formari poſſint, tamen iſta ratione relicta mox multo commodiorem modum exhibebo, harum ſerierum quamuis ex praecedente formandi, poſtquam obſeruationem maximi momenti communicauero.

§. 16.

§. 16. Cum ſit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, patet in ſerie euoluta $\mathfrak{B}$, quamuis poteſtatem ipſius x toties occurrere debere, quoties ea ex poteſtatibus x^1, x^2 per multiplicationem oriri poteſt, ſeu quoties eius exponens ex numeris 1 et 2 per additionem produci poteſt. Ita cum ſit:

$$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \dots + v''x^n$$

ex termino $3x^4$ intelligitur, numerum 4 tribus modis ex numeris 1 et 2 per additionem oriri poſſe, qui ſunt:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1;\ 4 = 1 + 1 + 2;\ \text{et}\ 4 = 2 + 2.$$

In genere ergo terminum $v''x^n$ conſiderando, coefficiens v'' indicabit, quot modis exponens n ex numeris 1 et 2 per additionem produci poſſit. Cum igitur ſit $B = \mathfrak{B}x^3$, in ſerie B habebitur iſte terminus $v''x^{n+3}$, qui cum indicet, numerum $n+3$ tot variis modis in duas partes inaequales ſecari poſſe, quot vnitates coefficiens v'' in ſe complectatur, manifeſtum eſt, numerum $n+3$ tot modis in duas partes inaequales diſtribui poſſe, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci queat.

§. 17. Deinde cum ſit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$, patet in hac ſerie $\mathfrak{C}$, quamuis poteſtatem ipſius x toties occurrere debere, quoties ea ex poteſtatibus x^1, x^2, x^3 per multiplicationem oriri queat, ſeu quod idem eſt, quoties eius exponens ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci poſſit. Ita cum ſit:

$$\mathfrak{C} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \dots + v''x^n$$

ex quouis eius termino $5x^5$ cognoſcetur, exponentem 5 quinque modis ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci poſſe, qui ſunt:

$5 = 1+1+1+1+1$; $5 = 1+1+1+2$; $5 = 1+1+3$;
$5 = 1+2+2$; $5 = 2+3$.

In genere autem terminum $v''' x^n$ conſiderando, coefficiens v''' indicabit, quot variis modis numerus n ex numeris 1, 2, 3, per additionem oriri queat. Cum igitur ſit $C = \mathfrak{C}x^6$, in ſerie C habebitur iſte terminus $v''' x^{n+6}$ quo indicatur, numerum $n+6$ tot modis, quot vnitates continentur in coefficiente v''' in tres partes inaequales diſpertiri poſſe. Vnde conſequitur, numerum $n+6$ totidem modis in tres partes inaequales diſtribui poſſe, quot modis numerus 6 ex numeris 1, 2, 3, per additionem produci poſſit.

§. 18. Non opus eſt, vt hoc ratiocinium longius proſequamur, cum hinc iam abunde perſpiciatur, quemuis numerum $n+10$ tot variis modis in quatuor partes inaequales diſpertiri poſſe, quot modis numerus n ex his quatuor numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci poſſit. Simili modo quilibet numerus $n+15$ tot variis modis in quinque partes inaequales diſpertiri poterit, quot modis numerus n ex his quinque numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci poteſt. Generatim ergo numerus $n+\frac{m(m+1)}{2}$ tot variis modis in m partes inaequales diſpertiri poterit, quot variis modis numerus n ex his numeris 1, 2, 3, 4 . . . . . . m per additionem produci poteſt. Quod ſi ergo quaeratur, quot variis modis numerus N in m partes inaequales diſpertiri poſſit, reſponſio reperietur, ſi caſuum numerus inueſtigetur, quibus numerus $N-\frac{m(m+1)}{2}$ ex numeris 1, 2, 3, 4 . . . . . m per additionem produci poteſt.

§. 19. Hoc igitur modo reſolutio quaeſtionis propoſitae, de partitione cuiusque numeri, in quot libuerit partes.

tes inaequales, reducitur ad ſolutionem alius Problematis iam ſupra commemorati, quo quaeritur, quot variis modis quilibet numerus ex aliquot terminis huius progreſſionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci poſſit. Hacque poſteriore quaeſtione reſoluta ſimul prior reſoluetur. Quod vt clarius explicemus, noua ſigna ad commodiorem expreſſionem adhibeamus. Denotet ergo haec ſcriptio:

$n^{(2)}$ numerum caſuum, quibus numerus n ex duobus numeris 1, 2 per additionem formari poſſit.

$n^{(3)}$ denotet numerum caſuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3 per additionem formari poſſit.

Et $n^{(m)}$ denotet numerum caſuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci poſſit. Cum igitur valores huiusmodi characterum fuerint definiti, quod deinceps praeſtabimus, Problema propoſitum ita reſoluetur. Si quaeratur ſcilicet, quot variis modis numerus N in m partes inaequales diſpertiri poſſit; numerus caſuum quaeſitus exprimetur hoc charactere $\left(N - \frac{m(m+1)}{1.2}\right)^{(m)}$, quippe quo indicatur, quot variis modis numerus $N - \frac{m(m+1)}{2}$ ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci poſſit.

§. 20. Ad hanc eandem quaeſtionem quoque reducitur ſolutio alterius Problematis a *Celeb. Naudeo* propoſiti, quam ob rem expediet, et hoc Problema ante reſolui, quam ampliorem characterum modo aſſumtorum euolutionem ſuſcipiamus, ſic enim tria Problemata, quae

 inter

inter ſe maxime videantur diuerſa, vna eademque opera reſoluemus. Problema autem ita ſe habet:

Inuenire quot variis modis datus numerus N *poſſit diſpertiri in* p *partes, partium aequalitate non excluſa.*

Quoniam hic partium aequalitas non excluditur, ſequentem formam contemplabor, quae huius quaeſtionis ſolutionem in ſe continebit

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)} \text{ etc.}$$

quae ſecundum poteſtates ipſius z euoluta praebeat hanc ſeriem:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ etc.}$$

eritque, vt ſupra §. VI. notauimus, coefficiens A ſumma omnium terminorum huius ſeriei x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc. ſeu $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 +$ etc. quae eſt eadem ſeries, quam in ſolutione praecedentis Problematis pro littera A obtinuimus.

§. 21. Deinde vero eſt B ſumma productorum ex binis terminis ſeriei A, quadratis ſingulorum terminorum non excluſis. Hinc erit B ſumma omnium poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſint aggregata duorum numerorum, ſiue aequalium, ſiue inaequalium: et cum eadem poteſtas hoc modo ſaepius reſultare poſſit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea poteſtas modis ſit productum ex binis terminis ſeriei A; ſeu quot variis modis eius exponens poſſit eſſe ſumma duorum numerorum, tam aequalium, quam inaequalium. Ex hoc fonte reperietur:

$$B = x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + \text{ etc.}$$

cuius

cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in duas partes diſpertiri poſſit. Hac igitur ſerie in infinitum continuata, Problematis propoſiti caſus, quo partitio in duas partes requiritur, facile reſoluitur.

§. 22. Quantitas porro C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur terminis ternis ſeriei A, ſiue inaequalibus ſiue aequalibus inuicem multiplicandis, conſtabit ex ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſint ſummae trium numerorum integrorum affirmatiuorum. Atque eadem poteſtas x^n toties in ſerie C occurret, quoties eius exponens n ex tribus numeris, ſiue aequalibus, ſiue inaequalibus per additionem reſultare poteſt. Erit autem:

$$C = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in tres partes, ſiue aequales, ſiue inaequales diſpertiri poſſit. Sic ex termino $8x^{10}$ colligitur, numerum 10 octo modis diuerſis in tres partes ſecari poſſe, quae partitiones ſunt:

$10 = 1 + 1 + 8$	$10 = 2 + 2 + 6$
$10 = 1 + 2 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 1 + 3 + 6$	$10 = 2 + 4 + 4$
$10 = 1 + 4 + 5$	$10 = 3 + 3 + 4$

Iſta igitur ſeries C in infinitum continuata omnibus numeris in tres partes diſpertiendis inſeruiet.

§. 23. Simili modo quantitas D, cum contineat omnia producta ex quatuor terminis ſeriei $A = x + x^2 + x^3 + x^4 +$ etc. eiusdem termini repetitione non ex-

cluſa: conſtituit ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſint aggregata quatuor numerorum, ſiue aequalium, ſiue inaequalium. In hac igitur ſerie quaelibet poteſtas ipſius x eiusmodi habebit coefficientem, qui indicet, quot variis modis eius exponens per additionem 4 numerorum reſultare poſſit. Reperietur autem hinc:

$$D = x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + \text{etc.}$$

Haec igitur ſeries in infinitum continuata oſtendet, quot variis modis quilibet numerus in quatuor partes diſpertiri poſſit. Sic ex termino $9x^{10}$ concluditur numerum 10 nouem modis in quatuor partes diſpertiri poſſe, quae partitiones ſunt:

$10 = 1 + 1 + 1 + 7$	$10 = 1 + 2 + 2 + 5$
$10 = 1 + 1 + 2 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$10 = 1 + 1 + 3 + 5$	$10 = 1 + 3 + 3 + 3$
$10 = 1 + 1 + 4 + 4$	$10 = 2 + 2 + 2 + 4$

$$10 = 2 + 2 + 3 + 3$$

§. 24. Hoc modo vlterius procedendo patebit, litteram E fore ſeriem poteſtatum ipſius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipſius x in quinque partes diſpertiri poſſit. Erit autem:

$$E = x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + \text{etc.}$$

Pari modo valor litterae F erit ſeries partitionibus in ſex partes inſeruiens, et litterarum G, H, I, etc. valores pro partitionibus in partes ſeptem, octo, nouem, etc. valebunt, erit autem:

F =

$$F = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + \text{etc.}$$
$$G = x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + \text{etc.}$$
etc.

Si hae ſeries cum illis, quas in ſolutione ſuperioris Problematis pro iisdem litteris inuenimus, mox patebit totum diſcrimen tantum in poteſtatibus ipſius x conſtare, coefficientesque ſolos vtrinque ſimiliter procedere. Ne autem hic inductioni vllum locum concedamus, iſtam conuenientiam ſequenti demonſtratione euincemus.

§. 25. Conſideremus, vt ſupra duos valores ipſius s, qui ſunt:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$
$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\text{ etc.}}$$

qui ſi loco z vbique ponatur xz, abeant in t eritque:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.}$$
$$t = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\text{ etc.}}$$

Vnde ſi poſteriores ipſarum s et t valores inuicem comparentur, mox patet eſſe $s = \frac{t}{1-xz}$ ſeu $t = (1-xz)s$, quae eadem relatio cum quoque inter priores litterarum s et t valores locum tenere debeat, erit:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.} =$$
$$\begin{aligned}(1-xz)s = 1 &+ Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}\\ &- xz - Axz^2 - Bxz^3 - Cxz^4 - Dxz^5 - \text{etc.}\end{aligned}$$

Vnde per coaequationem terminorum homogeneorum inuenitur:

A =

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax}{1-xx} = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$C = \frac{Bx}{1-x^3} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx}{1-x^4} = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

etc.

§. 26. Ex his formulis intelligitur, iſtas ſeries non ſolum quoque eſſe recurrentes, vti ſuperiores, ſed etiam coefficientium vtrinque eandem eſſe legem: Quare ſi neglectis numeratoribus ponatur: vt ſit

$\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$	$A = \mathfrak{A}x$
$\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$	$B = \mathfrak{B}x^2$
$\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$	$C = \mathfrak{C}x^3$
$\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$	$D = \mathfrak{D}x^4$
etc.	etc.

Partitio cuiusque numeri in partes quotumque, ſiue aequales, ſiue inaequales, pendet a formatione ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. quae, vti ante obſeruauimus, indicant, quot variis modis quiuis numerus ex aliquot terminis initialibus huius ſeriei 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci queat. Sic cum ſit $B = \mathfrak{B}x^2$, quiuis numerus $n + 2$ totidem modis in duas partes diſpertiri poteſt, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci poteſt. Simili modo cum ſit $C = \mathfrak{C}x^3$, numerus $n + 3$ tot modis in tres partes diſpertietur, quot modis numerus n per additionem ex numeris 1, 2, 3 componi poterit. Atque generaliter numerus $n + m$ tot va-

riis

riis modis in m partes, ſiue aequales, ſiue inaequales diſpertiri poteſt, quot modis numerus n ex numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci poteſt.

§. 27. Pendet ergo et hoc Problema a ſolutione quaeſtionis, qua quaeritur, quot variis modis datus numerus ex aliquot terminis initialibus huius ſeriei 1, 2, 3, 4, etc. per additionem reſultare poſſit. Si igitur vt ſupra haec ſcribendi formula $N^{(m)}$ denotet numerum modorum, quibus numerus N ex numeris 1, 2, 3, ... m per additionem componi poteſt, ſeu quibus numerus N in partes quotcunque diſtribui poſſit, quarum nulla maior ſit numero m; huius modi characteribus et hoc Problema propoſitum reſolui poterit. Scilicet $n^{(m)}$ indicabit, quot variis modis numerus $n+m$ in m partes, ſiue aequales, ſiue inaequales diſpertiri poſſit. Hinc ſi quaeratur, quot modis numerus N in partes m, ſiue aequales, ſiue inaequales diſtribui poſſit, numerum modorum quaeſitum indicabit haec formula $(N-m)^{(m)}$. Si igitur hoc Problema cum praecedente conferatur, perſpicuum erit, numerum $n+m$ totidem modis in m partes, ſiue aequales, ſiue inaequales diſtribui poſſe, quot modis numerus $n+\frac{m(m+1)}{2}$ in m partes inaequales diſpertiri poſſit.

§. 28. Solutio ergo amborum Problematum a *Cel. Naudeo* propoſitorum huc reuocatur, vt definiatur, quot variis modis numerus quicunque n ex his numeris 1, 2, 3 ..... m per additionem produci poſſit; ſeu vt inueſtigetur valor characteris $n^{(m)}$. Quemadmodum ergo hoc nouum Problema ex formulis iam ante inuentis commodiſſime reſolui queat, videamus. Ac primo quidem, ſi

ſit $m = 1$, quia quilibet numerus vnico modo ex meris vnitatibus per additionem elici poteſt, erit $n^{(1)} = 1$, quod idem prima formula $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, ſeu ſeries inde formata: $\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.}$ manifeſto indicat.

§. 29. Quoniam ſeries $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ indicat, quot modis quisque numerus ex numeris 1 et 2 per additionem formari poſſit, in hac ſerie poteſtatis x^n coefficiens erit $= n^{(2)}$, haec enim expreſſio aſſumta eſt ad ſignificandum, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem oriri poſſit. Hinc igitur erit:

$$\mathfrak{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.}$$

atque ad ſimilitudinem huius expreſſionis erit:

$$\mathfrak{A} = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.}$$

Deinde vero cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$ et $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ erit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(1 - x^2)$, vnde ſequens inter has ſeries relatio oritur:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A} & = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.} \\ \left.\begin{array}{l} +\mathfrak{B} \\ -\mathfrak{B}x^2 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.} \\ \qquad\quad - x^2 - 1^{(2)}x^3 - 2^{(2)}x^4 - 3^{(2)}x^5 - 4^{(2)}x^6 - \text{etc.} \end{array} \end{array}$$

Quodſi hinc coaequatio terminorum homogeneorum inſtituatur, erit:

$1^{(2)} = 1^{(1)}$	$4^{(2)} = 4^{(1)} + 2^{(2)}$	$7^{(2)} = 7^{(1)} + 5^{(2)}$
$2^{(2)} = 2^{(1)} + 1$	$5^{(2)} = 5^{(1)} + 3^{(2)}$	$8^{(2)} = 8^{(1)} + 6^{(2)}$
$3^{(2)} = 3^{(1)} + 1^{(2)}$	$6^{(2)} = 6^{(1)} + 4^{(2)}$	$9^{(2)} = 9^{(1)} + 7^{(2)}$

§. 30. Generaliter ergo erit $n^{(2)} = n^{(2)} + (n-2)^{(2)}$. Cum igitur ſit $n^{(1)} = 1$, erit $n^{(2)} = 1 + (n-2)^{(2)}$; ſicque coefficientes ſeriei $\mathfrak{B}$ ita determinabuntur, vt quisque

que terminus vltimus aequalis ſit antepenultimo vnitate aucto. Seu cum ſeries $\mathfrak{A}$ omnes coefficientes ſint vnitates, ex ſerie $\mathfrak{A}$ ſequenti modo ſeries $\mathfrak{B}$ formabitur:

$$\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \text{etc.}$$

$$\underline{\qquad\qquad 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 \qquad}$$

$$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \text{etc.}$$

Scilicet cum ſeriei $\mathfrak{B}$ duo termini initiales $1 + x$ conſtent, ſubſcribantur ii ſub terminis tertio et quarto ſeriei $\mathfrak{A}$, hincque per additionem orientur termini tertius et quartus ſeriei $\mathfrak{B}$, qui porro terminis quinto et ſexto ſeriei $\mathfrak{A}$ ſubſcripti et additi dabunt terminos quintum et ſextum ſeriei $\mathfrak{B}$, hocque modo ſeries $\mathfrak{B}$, quousque libuerit, facillime continuatur. Patet autem hinc eſſe $n^{(2)} = \frac{1}{2}\left(n\,{+1 \atop +2}\right)$, ſcilicet ſi n eſt numerus impar, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 1)$, ſin autem n ſit numerus par, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 2)$.

§. 31. Cum porro ſit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ erit $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}(1 - x^3)$, vnde cum ſeriei $\mathfrak{C}$ terminus generalis ſit $n^{(3)}x^n$ ſequens naſcetur relatio inter ſeries $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{B} & = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.} \\
\left.\begin{array}{l} +\mathfrak{C} \\ -\mathfrak{C}x^3 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} = 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \\ \quad\; 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -1x^3 - 1^{(3)}x^4 - 2^{(3)}x^5 - 3^{(3)}x^6 - \text{etc.} \end{array}
\end{array}$$

Si iam hic aequatio inter terminos homogeneos inſtituatur erit:

$1^{(3)} = 1^{(2)}$	$4^{(3)} = 4^{(2)} + 1^{(3)}$	$7^{(3)} = 7^{(2)} + 4^{(3)}$
$2^{(\ )} = 2^{(2)}$	$5^{(3)} = 5^{(2)} + 2^{(3)}$	$8^{(3)} = 8^{(2)} + 5^{(3)}$
$3^{(3)} = 3^{(2)} + 1$	$6^{(3)} = 6^{(2)} + 3^{(3)}$	$9^{(3)} = 9^{(2)} + 6^{(3)}$

et generaliter $n^{(3)} = n^{(2)} + (n-3)^{(3)}$

 Series

Series ergo 𝔆 ex ſerie 𝔅 ſuisque terminis antecedentibus ſequenti modo facile formatur. Omittamus autem poteſtates ipſius x, quia totum negotium in coefficientibus verſatur:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B} = 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+ \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 1+1+2+3+4+5+7+8+10 \\ \hline \mathfrak{C} = 1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+ \text{etc.} \end{array}$$

Scilicet ſeriei 𝔅 ſubſcribatur ſeries 𝔆, initium ſub termino quarto faciendo, et pro vti hoc modo ſeries 𝔆 per additionem oritur, ita quoque ſub ſerie 𝔅 continuabitur.

§. 32. Quia deinde eſt $\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ erit $\mathfrak{C} = (1-x^4)\mathfrak{D}$. Vnde ſimili modo, quo hactenus ſumus vſi, reperietur:

$1^{(4)} = 1^{(3)}$	$4^{(4)} = 4^{(3)} + 1$	$7^{(4)} = 7^{(3)} + 3^{(4)}$
$2^{(4)} = 2^{(3)}$	$5^{(4)} = 5^{(3)} + 1^{(4)}$	$8^{(4)} = 8^{(3)} + 4^{(4)}$
$3^{(4)} = 3^{(3)}$	$6^{(4)} = 6^{(3)} + 2^{(4)}$	$9^{(4)} = 9^{(3)} + 5^{(4)}$

et generaliter $n^{(4)} = n^{(3)} + (n-4)^{(4)}$

Pari modo vlterius progrediendo colligetur fore:

$$n^{(5)} = n^{(4)} + (n-5)^{(5)}$$
$$n^{(6)} = n^{(5)} + (n-6)^{(6)}$$
$$n^{(7)} = n^{(6)} + (n-7)^{(7)}$$

etc.

Generatim ergo hinc colligetur fore:

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$

Vbi notandum eſt, ſi fuerit $n < m$, tum terminum $(n-m)^{(m)}$ prorſus euaneſcere, ſin autem ſit $n = m$, etiamſi ſit $n-m = 0$, tamen terminum $(n-m)^{(m)}$ valere vnitatem. Deinde ſi ſit $n-m = 1$, quoque erit $(n-m)^{(m)} = 1$.

Erit

Erit ergo perpetuo tam $0^{(m)} = 1$, quam $1^{(m)} = 1$, et $n^{(1)} = 1$.

§. 33. His relationibus inter ſeries 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. notatis eae facillime formantur, et quousque libuerit, continuantur, quae operatio per hic adiunctum ſchematiſmum fiet manifeſtum:

	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}	etc.
𝔄 =	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	etc.
			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	etc.
𝔅 =	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	etc.
				1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	etc.
ℭ =	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	etc.
					1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	etc.
𝔇 =	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	etc.
						1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	etc.
𝔈 =	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	etc.
							1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	etc.
𝔉 =	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	etc.
								1	1	2	3	5	7	11	15	21	etc.
𝔊 =	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	etc.
									1	1	2	3	5	7	11	15	etc.
ℌ =	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	etc.
										1	1	2	3	5	7	11	etc.
ℑ =	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	etc.
											1	1	2	3	5	7	etc.
𝔎 =	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	etc.
												1	1	2	3	5	etc.
𝔏 =	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	etc.
													1	1	2	3	etc.
𝔐 =	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	etc.
														1	1	2	etc.
𝔑 =	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	etc.

§. 34. Hoc modo tabula hic adiuncta per ſolam continuam additionem eſt conſtructa, atque ratio conſtructionis tam eſt perſpicua ex inſpectione, vt ampliori explicatione non egeat. Ope huius tabulae igitur immediate reſoluitur hoc Problema, quo quaeritur, *quot variis modis datus numerus* n *ex his numeris* 1, 2, 3 . . . . . m *per additionem produci poſſit.*

Sic

Sic ſi quaeratur, quot variis modis numerus 10 ex his numeris 1, 2, et 3 per additionem oriri poſſit, erit $n = 10$ et $m = 3$, atque ex tabula reperitur modorum numerus $= 14$, qui modi ſunt:

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ | $10 = 1+1+1+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2$ | $10 = 1+1+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$ | $10 = 1+1+2+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+2+2$ | $10 = 1+2+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+2+3$ | $10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+2+2+2$ | $10 = 2+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+3+3$ | $10 = 2+2+3+3$

Si quaeratur, quot variis modis numerus 25 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci poſſit, facto $n = 25$ et $m = 5$, reperietur ex tabula numerus modorum $= 377$.

Si quaeratur quot variis modis numerus 50 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9, 10 per additionem reſultare poſſit, poſito $n = 50$ et $m = 10$, inuenitur modorum numerus $= 62740$

Si vel numerus propoſitus, vel numerus partium maior ſit quam in tabula, tum nihilo minus caſuum numerus ex tabula ope formularum ſupra inuentarum colligi poterit. Vti ſi quaeratur, quot modis numerus 60 ex his numeris 1, 2, 3 . . . . 20 per additionem reſultare poſſit, erit $n = 60$ et $m = 20$, quaeriturque valor formulae $60^{(20)}$. Eſt vero $60^{(20)} = 60^{(19)} + 40^{(20)}$, at $60^{(19)} = 60^{(18)} + 41^{(19)}$, porroque $60^{(18)} = 60^{(17)} + 42^{(18)}$, et $60^{(17)} = 60^{(16)} + 43^{(17)}$, ſicque deinceps. Vnde tandem erit $60^{(20)} = 40^{(20)} + 41^{(19)} + 42^{(18)} + 43^{(17)} + 44^{(16)} + \ldots\ldots + 59^{(1)}$, qui numeri ex tabula collecti dant 791131, totque modis numerus 60 ex numeris 1, 2, 3 . . . . . 20 per additionem elici poteſt.

§. 35.

§. 35. Ope huius tabulae deinde ambo Problemata *Cel. Naudei* expedite reſolui poſſunt. Ac primo quidem ſi quaeratur, *quot variis modis datus numerus* N *in* m *partes inter ſe inaequales diſpertiri poſſit*, *hoc fiet*, *vti ſupra oſtendimus*, *tot modis*, *quot vnitates continentur in hac expreſſione* $(N - \frac{m(m+1)}{2})^{(m)}$ *quam tabula indicat.*
Vſum igitur huius tabulae aliquot exemplis oſtendamus.

I. *Quaeratur*, *quot variis modis numerus* 25 *in quinque partes inaequales diſpertiri poſſit?*
Erit ergo hic $N = 25$ et $m = 5$, vnde $\frac{m(m+1)}{2} = 15$ et reſponſum continebit formula $10^{(5)}$, quae ex tabula eſt $= 30$ ita vt partitio 30 modis inſtitui poſſit:

II. *Quaeratur*, *quot variis modis numerus* 50 *in* 7 *partes inaequales diſpertiri poſſit?*
Hic eſt $N = 50$, $m = 7$ et $N - \frac{m(m+1)}{2} = 22$, vnde numerus partitionum quaeſitus eſt $= 22^{(7)} = 522$.

III. *Quaeratur*, *quot variis modis numerus* 100 *in* 10 *partes inaequales diſpertiri poſſit?*
Cum ſit $N = 100$ et $m = 10$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 45$ et numerus partitionum reperietur $45^{(10)} = 33401$.

IV. *Quaeratur*, *quot diuerſis modis numerus* 256 *in* 20 *partes inaequales diſpertiri poſſit?*
Ob $N = 256$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 46$, et numerus partitionum fiet $= 46^{(20)} = 96271$.

V. *Quaratur*, *quot diuerſis modis numerus* 270 *in* 20 *partes inaequales diſpertiri poſſit?*
Ob $N = 270$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 60$,
ideo-

ideoque numerus partitionum quaeſitus fit $= 60^{(20)}$, cuius valorem ante inuenimus eſſe $= 791131$. Tot ergo diuerſis modis numerus 270 in 20 partes inaequales diſpertiri poteſt.

§. 36. Simili modo ex tabula quoque alterum Problema reſoluetur, quo quaerebatur: *quot variis modis numerus* N *in* m *partes aequalitate partium non excluſa diſpertiri poſſit?*
Supra enim oſtendimus partitionum numerum quaeſitum contineri in hac formula $(N - m)^{(m)}$, quem valorem ex tabula depromere licet. Quae ſolutio quo facilius intelligatur, aliquot exempla adiiciamus.

I. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 25 *in quinque partes ſiue aequales ſiue inaequales diſpertiri poſſit?*
Hic eſt $N = 25$ et $m = 5$ vnde $N - m = 20$, et partitionum numerus erit $20^{(20)} = 192$.

II. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 50 *in ſeptem partes ſiue aequales ſiue inaequales diſpertiri poſſit?*
Ob $N = 50$ et $m = 7$ erit $N - m = 43$; et partitionum numerus quaeſitus fiet $43^{(7)} = 8946$.

III. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 50 *in decem partes ſiue aequales ſiue inaequales diſpertiri poſſit?*
Ob $N = 50$ et $m = 10$ erit $N - m = 40$ et partitionum numerus erit $40^{(10)} = 16928$.

IV. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 60 *in* 12 *partes ſiue aequales ſiue inaequales diſpertiri qoſſit?*
Cum ſit $N = 60$ et $m = 12$ erit $N - m = 48$, et partitionum numerus quaeſitus erit $48^{(12)} = 74287$.

V. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 80 *in* 20 *partes ſiue aequales ſiue inaequales diſpertiri poſſit?*

Erit

Erit ergo $N = 80$ et $m = 20$, vnde $N - m = 60$, et partitionum numerus erit: $= 60^{(20)} = 791131$.

§. 37. In ſeriebus horizontalibus, quas tabula exhibet notatu digna eſt conuenientia inter terminos initiales harum ſerierum, quae eo longius procedit, quo maior fuerit numerus m: ſic ſeries decima quinta quindecim ſuos terminos initiales cum omnibus ſeriebus ſequentibus habet communes. Hinc inueniri poterit ſeries, quae numero m in infinitum aucto reſpondet, quae ergo continebit valores huius formulae $n^{(\infty)}$; quae denotat, quot variis modis numerus n, ex omnibus prorſus numeris integris per additionem produci poſſit. Haec ergo quaeſtio digna videtur, quae diligentius euoluatur. Cum $n^{(\infty)}$ complectatur omnes omnino partitiones numeri n, pro quocunque partium numero ſimul ſumtas: erit $n^{(\infty)}$ aggregatum ex numeris partitionum in 1, 2, 3, 4, . . . vsque ad n partes, ſiue aequales, ſiue inaequales; quia numerus n in plures quam n partes ſecari nequit. Quam ob rem erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + \ldots\ldots (n-n)^{(n)}$$

in qua ſerie tam primus terminus $(n-1)^{(1)}$, qui denotat ſectionem in vnam partem, quam vltimus $(n-n)^{(n)}$, qui denotat ſectionem in n partes, eſt vnitas. Hinc igitur ſeries numerorum $n^{(\infty)}$, quae in calce tabulae exhibetur per additionem terminorum ex ſuperioribus ſeriebus inueniri poteſt. Sic erit: $6^{(\infty)} = 5^{(1)} + 4^{(2)} + 3^{(3)} + 2^{(4)} + 1^{(5)} + 0^{(6)} = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$, qui numerus in infima tabulae ſerie ſub numero 6 habetur.

§. 38. Poteſt autem haec operatio contrahi ope Lemmatis ſupra inuenti $n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n - m^{(m)}$, vnde fit $n^{(m)} - n^{(m-1)} = (n-m)^{(m)}$.

Cum enim ſit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + (n-6)^{(6)} + \text{etc.}$$

ſi vbique loco n ſcribatur $n-1$, erit:

$$(n-1)^{(\infty)} = (n-1)^{0} + (n-2)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-4)^{(3)} + (n-5)^{(4)} + (n-6)^{(5)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem praefigitur terminus $(n-1)^{0}$, cuius valor eſt $= 0$. Si igitur inferior ſeries a ſuperiori ſubtrahatur, ope Lemmatis prodibit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (11-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + (n-12)^{(6}$$

ſicque terminus quisque $n^{(\infty)}$ ope praecedentis $(n-1)^{(\infty)}$ per additionem duplo pauciorum terminorum quam ante inuenitur. Erit ergo ex: gr. $12^{(\infty)} = 11^{(\infty)} + 10^{(1)} + 8^{(2)} + 6^{(3)} + 4^{(4)} + 2^{(5)} + 0^{(6)}$ ſiue $12^{(\infty)} = 56 + 1 + 5 + 7 + 5 + 2 + 1 = 77$, qui numerus quoque pro valore ipſius $12^{(\infty)}$ in tabula reperitur.

§. 39. Simili modo haec operatio vlterius contrahi poteſt, cum enim ſit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + \text{etc.}$$

ſi loco n ponamus $n-2$ habebimus:

$$(n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} = (n-2)^{(0)} + (n-4)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-8)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem terminum $(n-2)^{(0)} = 0$ praemittimus. Nunc hanc ſeriem a ſuperiore ſubtrahando ope Lemmatis obtinebimus.

$$\left.\begin{matrix} +n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} \\ -(n-2)^{(\infty)} + (n-3)^{(\infty)} \end{matrix}\right\} = (n-3)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-9)^{(3)} + (n-12)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + \text{e}$$

Haec ergo ſeries ſi dicatur $= P$ erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} + P.$$

In ſerie ergo quaeſita ad definiendum terminum quemuis $n^{(\infty)}$ praeter valorem ipſius P noſſe oportet ternos termi-

nos

nos praecedentes. Hoc modo procedendo tandem quantitas P euaneſcet, et quilibet terminus iſtius ſeriei per ſolos terminos praecedentes definietur, quae eſt proprietas ſerierum recurrentium.

§. 40. Hanc vero ſeriem re vera eſſe recurrentem ex eius geneſi eſt manifeſtum, cum oriatnr ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ etc.}}$$

Scala ergo relationis iſtius ſeriei habebitur, ſi iſte denominator actu per multiplicationem euoluatur. Inſtituta autem hac multiplicatione denominator ſequenti modo expreſſus inuenietur.

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-{}^{70}-x^{77}+\text{ etc.}$$

Quae ipſius x poteſtates qualem teneant legem, ex ipſa formatione vix definiri poſſe videtur; interim tamen ex inſpectione mox patet, alternatim binos terminos eſſe affirmatiuos et negatiuos. Neque minus exponentes ipſius x certam legem tenere obſeruantur, vnde eius terminus generalis colligitur eſſe $x^{n(3n\pm1)2)}$. Scilicet nullae aliae poteſtates occurrunt niſi quarum exponentes continentur in hac formula $\frac{3nn\pm n}{2}$, et ita quidem vt poteſtates, quae ex numeris imparibus pro n aſſumtis oriuntur, habeant ſignum $-$, quae vero ex numeris paribus formantur, ſignum $+$.

§. 41. Haec igitur forma nobis ſuppeditat ſcalam relationis ſeriei quaeſitae, qua conſtat fore:

$$n^{(\infty)}=(n-1)^{(\infty)}+(n-2)^{(\infty)}-(n-5)^{(\infty)}-(n-7)^{(\infty)}+(n-12)^{(\infty)}+(n-15)^{(\infty)}$$
$$-(n-22)^{(\infty)}-(n-26)^{(\infty)}+(n-35)^{(\infty)}+(n-40)^{(\infty)}(n-51)^{(\infty)}-(n-57)^{(\infty)}+\text{etc.}$$

Hanc autem legem progreſſionis locum haberi tentanti facile patebit. Sit enim $n = 30$ reperietur fore:

$$30^{(\infty)} = 29^{(\infty)} + 28^{(\infty)} - 25^{(\infty)} - 23^{(\infty)} + 18^{(\infty)} + 15^{(\infty)} - 8^{(\infty)} - 4^{(\infty)}$$

eſt enim his numeris ex tabula deſumtis

$$5604 = 4565 + 3718 - 1958 - 1255 + 385 + 176 - 22 - 5$$

Atque hoc modo iſta ſeries quo vsque libuerit continuari poteſt.

§. 42. Quoniam vero ſeries pro valore $m = 20$ iam eſt formata, ex ea aliquanto facilius ſeries quaeſita pro valore $m = \infty$ erui poterit. Cum enim ſeries $n^{(20)}$ formetur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1-x^{20})}$$

ſeries vero $n^{(\infty)}$ ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-{}^3)(1-x^4)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1-x^{\infty})}$$

manifeſtum eſt ſi haec ſeries multiplicetur per

$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25})$ etc. ſeu per

$$\begin{aligned}
&1 - x^{21} - x^{22} - x^{23} - x^{24} - x^{25} - x^{26} - x^{27} - \text{etc.}\\
&+ x^{43} + x^{44} + 2x^{45} + 2x^{46} + 3x^{47} + 3x^{48} + 4x^{49} + 4x^{50} + \text{etc.}\\
&- x^{66} - x^{67} - 2x^{68} - 3x^{69} - 4x^{70} - 5x^{71} - 7x^{72} - 8x^{73} - 10x^{74} - \text{etc.}\\
&+ x^{90} + x^{91} + 2x^{92} + 3x^{93} + 5x^{94} + 6x^{95} + 9x^{69} + 11x^{97} + 15x^{98} + \text{etc.}\\
&- x^{115} - x^{116} - 2x^{117} - 3x^{118} - 5x^{119} - 7x^{120} - 10x^{121} - 13x^{122} - 18x^{123} - \text{etc.}\\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

tum prodire debere priorem. Hinc concluditur fore:

$n^{(20)}$

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - (n-21)^{(\infty)} - (n-22)^{(\infty)} - (n-23)^{(\infty)} - (n-24)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-43)^{(\infty)} + (n-44)^{(\infty)} + 2(n-45)^{(\infty)} + 2(n-46)^{(\infty)} + 3(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-66)^{(\infty)} - (n-67)^{(\infty)} - 2(n-68)^{(\infty)} - 3(n-69)^{(\infty)} - 4(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-90)^{(\infty)} + (n-91)^{(\infty)} + 2(n-92)^{(\infty)} + 3(n-93)^{(\infty)} + 5(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-115)^{(\infty)} - (n-116)^{(\infty)} - 2(n-117)^{(\infty)} - 3(n-118)^{(\infty)} - 5(n-119)^{(\infty)} - \text{etc}$$
$$\text{etc.}$$

quarum ſerierum coefficientes procedunt ſecundum ſeries ſuperiores pro partitione numerorum in 2, 3, 4, 5, 6, etc. partes inſeruientes.

§. 43. Denotet $\int (n-21)^{(\infty)}$ ſummam omnium terminorum ſeriei $n^{(\infty)}$, quae eſt:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 15 + 22 + 30 + \text{etc.}$$

vsque ad terminum $(n-21)^{(\infty)}$ incluſiue: ſimilique modo ſit generaliter $\int p^{(\infty)}$ ſumma omnium terminorum eiusdem ſeriei vsque ad terminum $p^{(\infty)}$ incluſiue, quae ſummae cum ſucceſſiue facile formentur, erit

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - \int(n-21)^{(\infty)} + \int(n-43)^{(\infty)} + \int(n-45)^{(\infty)} + \int(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-66)^{(\infty)} - \int(n-68)^{(\infty)} - \int(n-69)^{(\infty)} - \int(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-90)^{(\infty)} + \int(n-92)^{(\infty)} + \int(n-93)^{(\infty)} + 2\int(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Hincque adeo erit:

$$n^{(\infty)} = n^{(20)} + \int(n-21)^{(\infty)} - \int(n-43)^{(\infty)} - \int(n-45)^{(\infty)} - \int(n-47)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-66)^{(\infty)} + \int(n-68)^{(\infty)} + \int(n-69)^{(\infty)} + \int(n-70)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-90)^{(\infty)} - \int(n-92)^{(\infty)} - \int(n-93)^{(\infty)} - 2\int(n-94)^{(\infty)} - \text{etc.}$$

Huius formulae ope, niſi n ſit numerus valde magnus, ex ſerie pro partitione in 20 partes inſeruiente ipſa ſeries $n^{(\infty)}$ facile conſtituitur, hocque modo ea in tabula con-

ſtructa exhibetur, cum vbique exceſſus terminorum $n^{(\infty)}$ ſupra terminos $n^{(20)}$ ſint aſſignati.

§. 44. Hac igitur ſerie conſtructa propoſito quocunque numero definiri poterit, quot omnino modis is in partes diſpertiri poſſit. Sic patet numerum 10 omnino 42 modis ex additione reſultare poſſe; atque numerus 59 tot modis, quot indicat iſte numerus 831820 per additionem produci poterit. Sin autem numeri maiores proponantur, tum tabula hic exhibita vlterius continuari, vel pro quouis caſu numerus deſideratus per praecepta hic tradita inueſtigari debet. In his autem partitionibus aequalitas partium non excluditur. Vnde nouum oritur Problema, *quo pro quouis numero propoſito quaeritur omnium partitionum numerus in partes inter ſe inaequales*, quod Problema reſoluetur ope huius expreſſionis:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ etc.}$$

His enim factoribus in ſe inuicem multiplicatis orietur ſeries, in qua quilibet coefficiens oſtendet, quot variis modis exponens ipſius x in partes inter ſe inaequales diſpertiri poſſit.

§. 45. Quod ſi autem hoc productum actu euoluatur, reperietur haec ſeries:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+15x^{12}$$
$$+18x^{13}+22x^{14}+27x^{15}+32x^{16}+38x^{17}+46x^{18}+54x^{19}+64x^{20}+76x^{21}+89x^{22}+\text{etc.}$$

quae cum ſit productum ex factoribus infinitis tam ſimplicem legem ſeruantibus, omni attentione digna videtur. Ac primo quidem manifeſtum eſt coefficientes horum terminorum plerumque eſſe pares, et eos ſolum eſſe impares, qui ſint cum eiusmodi ipſius x poteſtatibus coniuncti, quarum exponentes in hac forma $\frac{3nn \pm n}{2}$ contineantur

neantur: cuius phaenomeni eadem eſt ratio, atque illius quod circa exponentes eiusdem formae $\frac{3nn \pm n}{2}$ in euolutione producti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. obſeruauimus. Cum autem ſit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) + \text{etc.} = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ \text{etc.}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ \text{etc.}}$$

apparet, ſeriem ante inuentam exprimi hac fractione:

$$\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-x^{70}-x^{80}+\ \text{etc.}}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ \text{etc.}}$$

vnde ea ad modum ſerierum recurrentium formari poterit.

§. 46. Facillime autem ſine dubio haec ſeries conſtruitur ex ipſa eius indole, qua cuiuslibet termini coefficiens indicare debet, quot variis modis exponens ipſius x in partes inaequales diſpertiri poſſit. Sit N coefficiens poteſtatis x^n in iſta ſerie, eritque:

$$N = (n-1)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + (n-21)^{(6)} + \text{etc.}$$

nam $(n-1)^{(1)} = 1$ indicat numerum n vnico modo ex vna parte conſtare: $(n-3)^{(2)}$ oſtendit, quot modis numerus n in duas partes inaequales, $(n-6)^{(3)}$ oſtendit, quot modis numerus n in tres partes inaequales diſtribui poſſit, et ita porro: vnde et haec ſeries ope tabulae datae quousque libuerit continuari poteſt. Ceterum hic notatu dignum eſt, ſi numeri partitionum in partes numero pares negatiue capiantur, hanc expreſſionem reſultantem:

$$(n-1)^{(1)} - (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} - (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} - (n-21)^{(6)} + \text{etc.}$$

ſemper eſſe $= 0$, niſi fuerit n numerus in hac forma contentus $\frac{3zz \pm z}{2}$; ſin autem n in hac forma contineatur, tum illius expreſſionis valorem eſſe vel $+1$ vel -1, pro vt z fuerit numerus vel impar vel par.

§. 47.

§. 47. Quemadmodum hactenus omnes numeros integros ad partes conſtituendas admiſimus, ita partium conditione limitanda numerus quaeſtionum in infinitum augeri poſſet: cui negotio, cum methodus certa ad huiusmodi quaeſtiones reſoluendas ſit tradita, non diutius immorabimur. Sufficiat ex praecedente inſignem proprietatem partitionis in partes impares annotaſſe. Cum ſit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ etc. = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\ etc.}$$

quae formula ex aequatione in §. XLIV. exhibita ſponte fluit, hinc ſequitur, quemuis numerum totidem modis ex numeris ſolis imparibus per additionem produci poſſe, quot modis idem numerus omnino in partes inter ſe inaequales diſpertiri poſſit. Sic cum numerus 10 decem modis in partes inaequales diſpertiri poſſit, qui modi ſunt:

$10 = 10$	$10 = 1 + 2 + 7$
$10 = 1 + 9$	$10 = 1 + 3 + 6$
$10 = 2 + 8$	$10 = 1 + 4 + 5$
$10 = 3 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 4 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

idem numerus 10 quoque decem modis ex ſolis numeris imparibus per additionem produci poteſt, hoc modo.

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+1+1+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+5$	$10 = 1+1+3+5$
$10 = 1+1+1+7$	$10 = 3+7$
$10 = 1+9$	$10 = 5+5$

§. 48. Relictis autem his ſpeculationibus progredior ad inueſtigandum, quomodo quisque numerus ex terminis progreſſionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.

etc. per additionem formari poſſit. Ac primo quidem ſi iſtae partes inter ſe debeant eſſe omnes inaequales, quaeſtio reſoluetur per euolutionem huius expreſſionis:

$$s = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\,\text{etc.}$$

Multiplicatione enim actu inſtituta, cuiusque termini coefficiens indicabit, quot modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae ex numeris progreſſionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. per additionem produci poſſit. Cum igitur quiuis numerus vnico modo ſic reſolui poſſe obſeruatus ſit, oſtendendum eſt in hac ſerie omnes ipſius x poteſtates occurrere, omniumque eundem eſſe coefficientem vnitatem.

§. 49. Vt hoc demonſtremus, ponamus eſſe

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \text{etc.}$$

atque ad valores coefficientium α, β, γ, δ, etc. eruendos, ponamus xx loco x, ſitque valor pro s hoc modo reſultans $= t$, erit:

$$t = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\ \text{etc.}$$

ideoque fiet $s = (1+x)t$. Qua relatione in ſeriebus conſiderata ob $t = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10} + \text{etc.}$ habebitur:

$$(1+x)t = 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + \beta x^5 + \gamma x^6 + \gamma x^7 + \delta x^8 + \delta x^9 + \text{etc.}$$

quae cum aequalis eſſe debeat ſeriei s, comparatio coefficientium dabit:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \alpha = 1 & \delta = \beta & \eta = \gamma & \kappa = \varepsilon \\ \beta = \alpha & \varepsilon = \beta & \theta = \delta & \lambda = \varepsilon \quad \text{etc.} \\ \gamma = \alpha & \zeta = \gamma & \iota = \delta & \mu = \zeta \end{array}$$

 vnde

vnde manifeſtum eſt, ſingulos coefficientes eſſe vnitati aequales, ac propterea eſſe:

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x},$$

quod idem per ſe perſpicuum eſt, cum ſit:

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\ \text{etc.} = 1.$$

§. 50. Sin autem quaeratur, quot variis modis quisque numerus ex terminis progreſſionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. partium aequalitate non amplius ſublata, per additionem produci queat: ſolutio petenda erit ex euolutione huius fractionis:

$$s = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})}\ \text{etc.}$$

hac enim in ſerie euoluta coefficiens cuiusque termini oſtendet, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae ex terminis progreſſionis Geometricae propoſitae per additionem reſultare poſſit. Ponamus xx loco x, et valor ipſius s abeat in t, erit:

$$t = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})\ \text{etc.}} = (1-x)s,$$

ſit igitur:

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \text{etc.}$$

erit:

$$\begin{array}{lllllllllll}
(1-x)s = 1 & +\alpha x & +\beta x^2 & +\gamma x^3 & +\delta x^4 & +\varepsilon x^5 & +\zeta x^6 & +\eta x^7 & +\theta x^8 & +\iota x^9 & \text{etc.} \\
 & -1 & -\alpha & -\beta & -\gamma & -\delta & -\varepsilon & -\zeta & -\eta & -\theta & \text{etc.} \\
= t = 1 & & +\alpha x^2 & & +\beta x^4 & & +\gamma x^6 & & +\delta x^8 & & \text{etc.}
\end{array}$$

vnde

vnde ex aequalitate terminorum homogeneorum obtinebitur:

$$\begin{array}{lll|lll|lll} \alpha = 1 & & = 1 & \eta = \zeta & & = 6 & \nu = \mu & & = 20 \\ \beta = \alpha + \alpha & & = 2 & \theta = \eta + \delta & & = 10 & \xi = \nu + \eta & & = 26 \\ \gamma = \beta & & = 2 & \iota = \theta + & & = 10 & o = \xi & & = 26 \\ \delta = \gamma + \beta & & = 4 & \varkappa = \iota + \varepsilon & & = 14 & \pi = o + \theta & & = 36 \\ \varepsilon = \delta & & = 4 & \lambda = \varkappa + & & = 14 & \varrho = \pi & & = 36 \\ \zeta = \varepsilon + \gamma & & = 6 & \mu = \lambda + \zeta & & = 20 & \sigma = \varrho + \iota & & = 46 \end{array} \quad \text{etc.}$$

§. 51. Notatu digna eſt haec ſeries, cum quod bini termini ſint vbique aequales, tum quod ea facillime quovsque libuerit continuetur. Vlterius autem continuata ita ſe habebit:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 6x^7 + 10x^8 + 10x^9 + 14x^{10} + 14x^{11} + 20x^{12} + 20x^{13} + 26x^{14} + 26x^{15} + 36x^{16} + 36x^{17} + 46x^{18} + 46x^{19} + 60x^{20} + 60x^{21} + 74x^{22} + 74x^{23} + 94x^{24} + 94x^{25} + 114x^{26} + 114x^{27} + 140x^{28} + 140x^{29} + 166x^{30} + 166x^{31} + 202x^{32} + 202x^{33} + 238x^{34} + 239x^{35} + 284x^{36} + 285x^{37} + \text{etc.}$$

Ex hac ergo ſerie patet numerum verbi gratia 30 centum ſexaginta, et ſex modis ex terminis progreſſionis Geometricae duplae per additionem produci poſſe. Ceterum attendenti facile patebit, legem huius progreſſionis nullo modo per terminum generalem exprimi poſſe cum reuera ſit ſeries recurrens, cuius ſcala relationis in infinitum extendatur. Dabit autem hoc productum infinitum:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-{}^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

ſi euoluatur ſcalam relationis. Ad quam inueniendam ponatur hoc productum $= p$, quod abeat in q ſi loco x ponatur x^2, eritque: $q = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})$ etc. $= \frac{p}{1-x}$, ſeu $p = (1-x)q$. ſtatuatur ergo:

$$p = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \varkappa x^{10} + \text{etc.}$$

eritque:

$$(1-x)q = 1 - x + \alpha x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4 - \beta x^5 + \gamma x^6 - \gamma x^7 + \delta x^8 - \delta x^9 + \varepsilon x^{10} - \text{etc.}$$

vnde per coaequationem terminorum ſimilium obtinetur:

$\alpha = -1 = -1$	$\theta = \delta = -1$	$o = -\eta = +1$
$\beta = \alpha = -1$	$\iota = -\delta = +1$	$\pi = \theta = -1$
$\gamma = -\alpha = +1$	$\kappa = \varepsilon = +1$	$\rho = -\theta = +1$
$\delta = \beta = -1$	$\lambda = -\varepsilon = -1$	$\sigma = \iota = +1$
$\varepsilon = -\beta = +1$	$\mu = \zeta = +1$	$\tau = -\iota = -1$
$\zeta = \gamma = +1$	$\nu = -\zeta = -1$	$\upsilon = \kappa = +1$
$\eta = -\gamma = -1$	$\xi = \eta = -1$	$\varphi = -\kappa = -1$

etc.

§. 52. Coefficientes ergo ſeriei p, quae ex euolutione huius producti:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

naſcitur omnes ſunt vel $+1$ vel -1, neque tamen legem obtinent ſolito more aſſignabilem, erit enim:

$$p = 1 - x^1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} - x^{14}$$
$$+ x^{15} - x^{16} + x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} - x^{22} + x^{23} + x^{24} - x^{25} - x^{26} + x^{27} - x^{28} + x^{29}$$
$$+ x^{30} - x^{31} - x^{32} + x^{33} + x^{34} - x^{35} + x^{36} - x^{37} - x^{38} + x^{39} + x^{40} - x^{41} - x^{42} + x^{43} - x^{4\ldots}$$

vbi notandum eſt, quamlibet poteſtatem exponentis imparis x^{2n+1} contrarium habere ſignum ei, quod habet poteſtas x^{2n}, huiusque ſignum perpetuo conuenire cum ſigno poteſtatis x^n; vnde cuiusuis poteſtatis ſignum facile aſſignabitur. Vti ſi quaeratur ſignum poteſtatis huius x^{1745}, erit reſpectu ad ſola ſigna habito:

$$x^{1745} = -x^{1744} = -x^{872} = -x^{436} = -x^{218} = -x^{109} = +x^{108} =$$
$$+x^{54} = +x^{27} = -x^{26} = -x^{13} = +x^{12} = +x^{6} = +x^{3} = -x^{2} = -x^{1}$$

ſignum ergo poteſtatis x^{1745} contrarium eſt ſigno poteſtatis x^8 quod cum ſit $-$ erit id $+$.

Tabula

Tabula indicans, quot variis modis quilibet numerus n ex numeris 1, 2, 3, 4, - - - - m per additionem produci poſſit, ſeu exhibens valores formulae $n^{(m)}$.

Num. m.	Valores numeri n.																						
m.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	^{1}2	^{1}2	^{2}3	^{2}3	^{3}4	^{3}4	^{4}5	^{4}5	^{5}6	^{5}6	^{6}7	^{6}7	^{7}8	^{7}8	^{8}9	^{8}9	^{9}10	^{9}10	^{10}11	^{10}11	^{11}12
3	1	1	2	^{1}3	^{1}4	^{2}5	^{3}7	^{4}8	^{5}10	^{7}12	^{8}14	^{10}16	^{12}19	^{14}21	^{16}24	^{19}27	^{21}30	^{24}33	^{27}37	^{30}40	^{33}44	^{37}48	^{40}52
4	1	1	2	3	^{1}5	^{1}6	^{2}9	^{3}11	^{5}15	^{6}18	^{9}23	^{11}27	^{15}34	^{18}39	^{23}47	^{27}54	^{34}64	^{39}72	^{47}84	^{54}94	^{64}108	^{72}120	^{84}136
5	1	1	2	3	5	^{1}7	^{1}10	^{2}13	^{3}18	^{5}23	^{7}30	^{10}37	^{13}47	^{18}57	^{23}70	^{30}84	^{37}101	^{47}119	^{57}141	^{70}164	^{84}192	^{101}221	^{119}255
6	1	1	2	3	5	7	^{1}11	^{1}14	^{2}20	^{3}26	^{5}35	^{7}44	^{11}58	^{14}71	^{20}90	^{26}110	^{35}136	^{44}163	^{58}199	^{71}235	^{90}282	^{110}331	^{136}391
7	1	1	2	3	5	7	11	^{1}15	^{1}21	^{2}28	^{3}38	^{5}49	^{7}65	^{11}82	^{15}105	^{21}131	^{28}164	^{38}201	^{49}248	^{65}300	^{82}364	^{105}436	^{131}522
8	1	1	2	3	5	7	11	15	^{1}22	^{1}29	^{2}40	^{3}52	^{5}70	^{7}89	^{11}116	^{15}146	^{22}186	^{29}230	^{40}288	^{52}352	^{70}434	^{89}525	^{116}638
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	^{1}30	^{1}41	^{2}54	^{3}73	^{5}94	^{7}123	^{11}157	^{15}201	^{22}252	^{30}318	^{41}393	^{54}488	^{73}598	^{94}732
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	^{1}42	^{1}55	^{2}75	^{3}97	^{5}128	^{7}164	^{11}212	^{15}267	^{22}340	^{30}423	^{42}530	^{55}653	^{75}807
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	^{1}56	^{1}76	^{2}99	^{3}131	^{5}169	^{7}219	^{11}278	^{15}355	^{22}445	^{30}560	^{42}695	^{56}863
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	^{1}77	^{1}100	^{2}133	^{3}172	^{5}224	^{7}285	^{11}366	^{15}460	^{22}582	^{30}725	^{42}905
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	^{1}101	^{1}134	^{2}174	^{3}227	^{5}290	^{7}373	^{11}471	^{15}597	^{22}747	^{30}935
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	^{1}135	^{1}175	^{2}229	^{3}293	^{5}378	^{7}478	^{11}608	^{15}762	^{22}957
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	^{1}176	^{1}230	^{2}295	^{3}381	^{5}483	^{7}615	^{11}773	^{15}972
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	^{1}231	^{1}296	^{2}383	^{3}486	^{5}620	^{7}780	^{11}983
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	^{1}297	^{1}384	^{2}488	^{3}623	^{5}785	^{7}990
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	^{1}385	^{1}489	^{2}625	^{3}788	^{5}995
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	^{1}490	^{1}626	^{2}790	^{3}998
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	^{1}627	^{1}791	^{2}1000
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	^{1}792	^{2}1002

m.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17
	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18
3	44	48	52	56	61	65	70	75	80	85	91	96
	56	61	65	70	75	80	85	91	96	102	108	114
4	94	108	120	136	150	169	185	206	225	249	270	297
	150	169	185	206	225	249	270	297	321	351	378	411
5	141	164	192	221	255	291	333	377	427	480	540	603
	291	333	377	427	480	540	603	674	748	831	918	1014
6	163	199	235	282	331	391	454	532	612	709	811	931
	454	532	612	709	811	931	1057	1206	1360	1540	1729	1945
7	164	201	248	300	364	436	522	618	733	860	1009	1175
	618	733	860	1009	1175	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120
8	146	186	230	288	352	434	525	638	764	919	1090	1297
	764	919	1090	1297	1527	1801	2104	2462	2857	3319	3828	4417
9	123	157	201	252	318	393	488	598	732	887	1076	1291
	887	1076	1291	1549	1845	2194	2592	3060	3589	4206	4904	5708
10	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807	984	1204
	984	1204	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888	6912
11	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863	1060
	1060	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035	4802	5708	6751	7972
12	56	77	100	133	172	224	285	336	460	582	725	905
	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262	6290	7476	8877
13	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	591	747
	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691	5635	6761	8067	9624
14	30	42	56	77	101	135	175	229	291	374	478	608
	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057	4920	5926	7135	8551	10232
15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	299	381	483
	1210	1508	1861	2297	2815	3446	4192	5096	6157	7434	8932	10715
16	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	383
	1225	1530	1891	2339	2871	3523	4293	5231	6333	7665	9229	11098
17	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297
	1236	1545	1913	2369	2913	3579	4370	5332	6469	7841	9459	11395
18	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
	1243	1556	1928	2391	2943	3621	4426	5409	6570	7976	9635	11626
19	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
	1248	1563	1939	2406	2965	3651	4468	5465	6647	8077	9770	11802
20	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135
	1251	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703	8154	9871	11937
∞	4	7	12	19	30	45	67	97	139	195	272	373
	1255	1575	1958	2436	3010	3718	4565	5604	6842	8349	10143	12310

m	35	36	37	38	39	40	41	42	43
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	17	18	18	19	19	20	20	21	21
2	18	19	19	20	20	21	21	22	22
	102	108	114	120	127	133	140	147	154
3	120	127	133	140	147	154	161	169	176
	321	351	378	411	441	478	511	551	588
4	441	478	511	551	588	632	672	720	764
	678	748	831	918	1014	1115	1226	1342	1469
5	1115	1226	1342	1469	1602	1747	1898	2062	2233
	1057	1206	1360	1540	1729	1945	2172	2432	2702
6	2172	2432	2702	3009	3331	3692	4070	4494	4935
	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120	3539	4011
7	3539	4011	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8946
	1527	1801	2104	2462	2857	3319	3828	4417	5066
8	5066	5812	6630	7564	8588	9749	1108	12450	14012
	1549	1845	2194	2592	3060	3589	4206	4904	5708
9	6615	7657	8824	10156	11648	13338	15224	17354	19720
	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888
10	8070	9418	10936	12690	1466	6928	19466	22367	25608
	1303	1586	1930	2331	2812	3379	4035	4802	5708
11	9373	11004	12866	15021	17475	20298	23501	27169	31316
	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262
12	10489	12384	14552	17084	19978	23334	27156	31570	36578
	935	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691
13	11424	13542	15988	18847	22142	25971	30366	35452	41269
	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057
14	12186	14499	17176	20325	23961	28212	33104	38797	45326
	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446
15	12801	15272	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772
	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871
16	13287	15892	18928	22518	26694	31603	37292	43951	51643
	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369
17	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45464	54012
	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928
18	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080	47420	55940
	231	297	385	490	626	790	998	1248	1563
19	14199	17062	20425	24412	29092	34624	41078	48668	57503
	176	231	297	385	490	627	791	1000	1251
20	14375	17293	20722	24803	29588	35251	41869	49668	58754
	508	684	915	1212	1597	2087	2714	3506	4507
∞	14883	17977	21637	26015	31185	37338	44583	53174	63261

m	44	45	46	47	48	[illegible]	[illegible]	51
1	[illegible]	1	1	1	1	1	1	1
	22	22	23	23	24	24	25	2[illegible]
2	2[illegible]	23	24	24	25	25	26	26
	161	169	176	184	192	200	208	217
3	18[illegible]	192	[illegible]	2[illegible]8	217	225	234	243
	63[illegible]	672	720	704	816	864	920	972
4	81[illegible]	864	920	972	1033	1089	1154	1215
	16[illegible]	1747	1898	2062	2233	2418	2611	2818
5	2418	2611	2818	3[illegible]34	3266	3507	3765	4033
	3[illegible]	3331	3692	407[illegible]	4494	4935	5427	5942
6	542[illegible]	594[illegible]	651[illegible]	71[illegible]4	77[illegible]	8442	9192	9975
	4526	51[illegible]2	5731	643[illegible]	719[illegible]	8033	8946	9953
7	995[illegible]	11044	12241	13434	1495[illegible]	16475	18134	19928
	581[illegible]	663[illegible]	7564	8558	9749	11018	12450	14012
8	15765	1767[illegible]	19805	22122	24699	27493	30588	33640
	6615	7657	8824	1[illegible]156	11048	13338	15224	17354
9	22[illegible]	25331	28629	32278	36347	40831	45812	51294
	6912	807[illegible]	9418	1[illegible]936	1269[illegible]	14663	16928	19466
10	2929[illegible]	334[illegible]1	38047	43214	4[illegible]37	55494	6274[illegible]	7076[illegible]
	6751	7972	9373	11[illegible]04	12866	15[illegible]21	17475	2[illegible]298
11	3[illegible]43	41373	4742[illegible]	54218	619[illegible]3	70515	80215	91[illegible]58
	629[illegible]	7[illegible]76	[illegible]877	1[illegible]489	12384	14552	17[illegible]84	19978
12	42333	48840	56297	647[illegible]7	74287	85[illegible]67	9[illegible]299	111[illegible]36
	563[illegible]	6761	8073	9624	11424	13542	159[illegible]	18847
13	47968	5561[illegible]	64370	74331	85711	9[illegible]6[illegible]9	11328[illegible]	1[illegible]988[illegible]
	4920	5925	7139	8551	1[illegible]232	12186	14409	17176
14	5[illegible]888	61538	715[illegible]9	82882	95943	110795	127[illegible]	147[illegible]
	4192	5[illegible]96	6158	7434	8932	1[illegible]715	128[illegible]1	15[illegible]
15	5[illegible]	66634	77667	9[illegible]316	1[illegible]4875	12151[illegible]	14[illegible]5[illegible]	1[illegible]2331
	3523	4293	5231	6334	7665	9228	1109[illegible]	132[illegible]7
16	606[illegible]	7[illegible]927	82898	9665[illegible]	11254[illegible]	13[illegible]73[illegible]	151685	175618
	2913	3579	437[illegible]	5332	6469	7841	9459	11395
17	6[illegible]	7[illegible]26	87268	1[illegible]1982	119[illegible]9	13[illegible]9	161144	187[illegible]13
	[illegible]391	[illegible]943	3621	4426	54[illegible]9	6570	7976	9635
18	[illegible]	[illegible]49	9[illegible]889	1064[illegible]8	124418	145149	16912[illegible]	196648
	1939	24[illegible]	2965	3651	4468	5465	6647	8077
19	6[illegible]46	[illegible]0855	93854	11[illegible]59	12[illegible]6	15[illegible]614	17[illegible]767	[illegible]
	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703
20	69414	818[illegible]1	96271	113[illegible]39	132559	155112	181274	211528
	5761	7333	9267	11715	14714	18413	22952	28515
21	751[illegible]	89134	1[illegible]558	124754	147273	173525	204226	239943

m	52	53	54	55	56	57	58	59
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	26	26	27	27	28	28	29	29
2	27	27	28	28	29	29	30	30
	225	234	243	252	261	271	280	290
3	252	261	271	280	290	300	310	320
	1033	1089	1154	1215	1285	1350	1425	1495
4	1285	1350	1425	1495	1575	1650	1735	1815
	3034	3266	3507	3765	4033	4319	4616	4932
5	4319	4616	4932	5260	5608	5969	6351	6747
	6510	7104	7760	8442	9192	9975	10829	11720
6	10829	11720	12692	13702	14800	15944	17180	18467
	11044	12241	13534	14950	16475	18138	19928	21873
7	21873	23961	26226	28652	31275	34082	37108	40340
	15765	17674	19805	22122	24699	27493	30588	33940
8	37638	41635	46031	50774	55974	61575	67696	74280
	19720	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812
9	57358	64015	71362	79403	88252	97922	108527	120092
	22367	25608	29292	33401	38047	43214	49037	55494
10	79725	89623	100654	112804	126299	141136	157564	175586
	23501	27169	31316	36043	41373	47420	54218	61903
11	103226	116792	131970	148847	167672	188556	211782	237489
	23334	27156	31570	36578	42333	48849	56297	64707
12	126560	143948	163540	185425	210005	237405	268079	302196
	22142	25971	30366	35452	41269	47968	55610	64370
13	148702	169915	193906	220877	251274	285373	323689	366566
	20325	23961	28212	33104	38797	45320	52888	61538
14	169027	193880	222118	253981	290071	330699	376577	[illegible]28104
	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772	57080
15	187175	215415	247587	284054	325472	372311	425349	485184
	15892	18928	22518	26694	3160[illegible]	37292	43951	51643
16	203067	234343	270105	310748	357075	[illegible]9603	469300	536827
	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45864
17	216738	250723	289656	334051	384759	[illegible]42442	508137	582691
	11626	13968	16765	20049	23928	28472	33834	40080
18	228364	264691	306421	354091	408687	470914	541971	622771
	9770	11802	14199	17062	20425	24418	29098	34624
19	238134	276493	320620	371153	429112	495332	571069	657395
	8154	9871	11937	14375	17293	20722	24803	29588
20	246288	286364	332557	385528	446405	516054	5958[illegible]2	686983
	35301	43567	53598	65748	80418	98100	119348	144837
∞	281589	320931	386155	451276	526823	614154	715220	831820

MEDITATIONES
DE QVANTITATIBVS IMAGINARIIS CONSTRVENDIS ET RADICIBVS IMAGINARIIS EXHIBENDIS.

AVCTORE

HENRICO KUEHNIO.

§. 1.

Tab. I. In *Commercio Mathematico Petropolitano Anni* 1736, occaſione Problematis a *Cel. Eulero* mihi propoſiti de inueniendo Cubo numeri $-1 \pm \sqrt{-3}$, (quorum vterque eſt $= 8$) cum quantitatibus ſcilicet imaginariis affecti, praeter genuinam rationis definitionem, dedi quoque veras notiones quantitatum homogenearum, item poſitiuarum primitiuarum, et praeterea definitiones geneticas quantitatum deriuatiuarum, tam nihilo aequalium, quam priuatiuarum, et poſitiuarum deriuatiuarum, easque omnes inter ſe homogeneas, reales, et aſſignabiles eſſe oſtendi. At vero quantitatum, quas *imaginarias* appellare ſolemus, definitionem geneticam tum temporis nondum habui, conſequenter nec modum oſtendere potui, quo quantitates imaginariae eſſent exhibendae, etſi iam tum temporis, contra doctrinam receptam, affirmaueram, has ipſas non eſſe impoſſibiles, ſed, aeque vt ceteras quantitates deriuatiuas, omnino reales eſſe et aſſignabiles.

§. 2. Ad hunc defectum, quantum poſſim, ſupplendum pertinent ea, quae haud pridem de conſtructione quantitatum imaginariarum meditatus ſum. Has ipſas meditationes Iudicio *Illuſtris Academiae Scientiarum Imperialis* permitto, ſperans, me hoc Tentamine occaſionem ſuppe-

ſuppeditatarum Analyſis perſpicacioribus, ad doctrinam quantitatum imaginariarum, quae hactenus tantis tenebris inuoluta fuit, et latius et profundius pertractandam.

§. 3. Sint nimirum (*Fig.* 1.) quatuor rectangula α, β, Fig. 1.
γ, et δ, ad idem punctum P coniugata, quorum omnium latera et areae, ob homogeneitatem conſeruandam, aeſtimanda ſint ex lateribus et area rectanguli α, cuius nempe longitudo PQ eſt poſitiua ($= + a$), et latitudo PR ($= + b$) itidem poſitiua, adeoque □li α area $= + a \cdot + b = + ab$. Iam producantur PQ et PR in q et r, donec ſit Pq = PQ $= a$, et Pr = PR $= b$: notum eſt, rectas deriuatiuas Pq et Pr ita exprimendas eſſe, vt dicatur Pq = − PQ $= -a$, et Pr = − PR $= -b$. Rectangulum itaque γ, ipſi □lo α oppoſitum, h. e. ipſi α, quoad longitudinem et latitudinem ſimul, deinceps poſitum, habebit longitudinem priuatiuam Pq ($= -a$), et latitudinem priuatiuam Pr ($= -b$), eritque area □li γ = Pq . Pr $= -a \cdot -b = + ab$, vel $= + ba$, vt □lum γ ($= + ba$) ab altero α ($= + ab$) diſcerni poſſit. Et hactenus nota ſunt omnia. Similiter □lum β, ipſi α, quoad latitudinem ſolam PR, deinceps poſitum, habebit longitudinem poſitiuam PQ ($= + a$), ſed latitudinem priuatiuam Pr ($= -b$), eritque adeo area □li $\beta = + a \cdot - b = - ab$, vel vt latitudo deinceps poſita ($= -b$) ſimul exprimatur $= -ba$. Eodem modo □lum δ, ipſi α, quoad longitudinem ſolam PQ, deinceps poſitum, habebit latitudinem poſitiuam PR ($= + b$), ſed longitudinem priuatiuam Pq($= -a$), eritque adeo area □li $\delta = - ab$, vbi expreſſio $-ab$ alteri $-ab$ praeferenda videtur, ad latus deinceps poſitum ($-a$) ſimul exprimendum.

§. 4. Quod ſi ergo, ex area □li poſitiui primitiui $\alpha = +ab$, area □li poſitiui deriuatiui $+ba$ exhibenda eſt, nulla alia re opus eſt, niſi vt longitudo et latitudo poſitiua P Q et P R vltra punctum concurſus P producatur in q et r, factaque $Pq = PQ$, et $Pr = PR$, conſtruatur □lum γ, cuius area $= Pq \, . \, Pr = -a \, . \, -b = +ba$. Eodem modo patet, ſi ex □lo $\alpha (= +ab)$, conſtruendum fuerit □lum cuius area $= -ab$, opus eſſe, vt longitudo poſitiua P Q ſola vltra eius originem P retrorſum producatur in q, donec ſit $Pq = PQ$, conſtruaturque □lum δ, cuius area $= Pq \, . \, PR = -a \, . \, +b = -ab$. Tandem, ſi ex □lo $\alpha (= +ab)$, conſtruendum fuerit □lum cuius area $= -ba$, neceſſe eſt, vt, latitudine poſitiua PR ſola vltra eius originem P retrorſum producta in r, donec ſit $Pr = PR$, conſtruatur □lum β, cuius area $= Pr \, . \, PQ = -b \, . \, +a = -ba$.

§. 5. Iam ponatur in α, latitudo PR $=$ longitudini P Q, ſeu $b = a$; quatuor iſta □la α, β, γ, δ, abibant in totidem quadrata α, β, γ et δ ad idem punctum P coniugata, quorum primum α habet longitudinem et latitudinem poſitiuam, adeoque eius area $= PQ \, . \, PR = +a \, . \, +a = +a^2$, eiusque latus PQ vel PR (ſeu, accuratius loquendo, radix areae quadratae) recte exprimitur per $\sqrt{+a^2} = \sqrt{[+a \, . \, +a]} = +a$. Secundum □tum β habet latitudinem priuatiuam $Pr = -a$, et longitudinem poſitiuam $PQ = +a$, adeoque eius area $= Pr \, . \, PQ = -a \, . \, +a = -a^2$, eiusque latus ſeu radix, cum nec per ſolam $PQ (= +a)$, nec per ſolam $Pr (= -a)$ exprimi poſſit, ſed vtriusque dimenſionis ſimul ratio habenda ſit, recte exprimitur per $\sqrt{[Pr \, . \, PQ]} = \sqrt{[-PR \, . \, PQ]}$

$= \sqrt{}$

$=\sqrt{}[-a.+a]$, ſeu, breuitatis gratia, per $+\sqrt{-a^2}$. Tertium □tum γ habet longitudinem et latitudinem priuatiuam, adeoque eius area $=Pq.Pr=-a.-a=+a^2$, eiusque latus ſeu radix Pq vel Pr recte exprimitur per $\sqrt{}[-a.-a]$, ſeu per $-a$. Quartum denique □tum δ habet longitudinem priuatiuam $Pq=-a$, et latitudinem poſitiuam $PR=+a$, adeoque eius area $=Pq.PR$ $=-a.+a=-a^2$, latus autem ſeu radix, cum nec per ſolam $Pq(=-PQ=-a)$, nec per ſolam PR $(=+a)$ exprimi poſſit, vtriusque dimenſionis rationem ſimul habendo, exprimenda erit per $\sqrt{}[Pq.PR]=\sqrt{}[-PQ.PR]=-\sqrt{}[-a.+a]$, ſeu per $-\sqrt{-a^2}$. Nimirum ſigno radicali ſignum — praefigitur, ob □ta β et δ inter ſe oppoſita. Atque ſic □torum β et δ latera ſeu radices ſunt quantitates imaginariae, et nihilo minus aſſignabiles. Quadrato enim β aut δ, ipſi □to α deinceps poſito, aſſignato ſeu conſtructo, ſimul latera eorundem aſſignata ſunt.

§. 6. Vnde etiam patet, ſi calculus deducat ad aequationem $x^2=-a^2$, ſeu ad $x^2+a^2=0$, eam aequationem non eſſe diuiſibilem, nec per $x-a=0$, nec per $x+a=0$; ſed per $x+a\sqrt{-a^2}=0$, item per $x-\sqrt{-a^2}=0$. Eſt enim $\dfrac{x^2 * + a^2=0}{x+\sqrt{-a^2}=0}=x-\sqrt{-a^2}=0$, et $\dfrac{x^2 * + a^2=0}{x-\sqrt{-a^2}=0}=x+\sqrt{-a^2}=0$, ita vt □ti β latus, ſeu, accuratius loquendo, radix difiniatur per aequationem $x-\sqrt{-a^2}=0$, ſeu $x=+\sqrt{-a^2}$, □ti autem δ latus per $x+\sqrt{-a^2}=0$, ſeu $x=-\sqrt{-a^2}$, cum aequatio propoſita $x^2 * + a^2=0$, ſimul definiat

□tum β, et □tum δ. Hicce proceſſus aequationem quadraticam puram reſoluendi et conſtruendi plane ſimilis eſt proceſſui ordinario in caſu α et γ, quorum quadratorum vtrumque, ſeu x^2, cum ſit $= + a^2$, aequatio $x^2 * - a^2 = 0$, vtrumque caſum ſimul complectitur, et diuiſibilis eſt tam per $x - a = 0$, quam per $x + a = 0$. Eſt enim $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x - a = 0} = + a = 0$; idem $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x + a = 0} = x - a = 0$, vbi latus □ti α definitur per aequationem $x - a = 0$, ſeu $x = + a$, et latus □ti γ per $x + a = 0$, ſeu $x = - a$: aut ſimilitudo operationis clarius diſpaleſcat, reperietur eſſe $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x - \sqrt{+ a^2} = 0} = x + \sqrt{+ a^2} = 0$, ſeu $x + a = 0$, item $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x + \sqrt{+ a^2}} = x - \sqrt{+ a^2} = 0$, ſeu $x - a = 0$, quarum expreſſionum illa, $x \mp \sqrt{+ a^2} = 0$, propria atque genuina videtur, altera autem, $x \mp a = 0$, ſaltem impropria, et non niſi toleranter vera.

§. 7. Quoniam quadratum priuatiuum $= - a^2$, eiusque latus ſeu radix, ſiue ponatur $+ \sqrt{- a^2}$, ſiue $- \sqrt{- a^2}$, haberi ſolet pro quantitate imaginaria, et (quod idem valere creditur) pro impoſſibili, adeoque pro non reali, aut inaſſignabili; operae pretium videtur, vt contrarium
Fig. 2. Geometrice oſtendam. Sint nimirum (*Fig.* 2.) quatuor quadrata α, β, γ, δ, ad idem punctum P coniugata, eaque, abſolute conſiderata, inter ſe aequalia, ſed tamen, quoad aream et latera, pro diuerſo quadratorum ſitu, diuerſimode exprimenda. Quod attinet aream □ti α, tanquam poſitiui primitiui conſiderati, notum eſt ex *Elementis Geometriae*, eius aream inueniri inſerendo:

I.

I. $\left\{ \begin{array}{l} {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : {}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} \\ \text{ſeu } PH : PQ \end{array} \right\} = {}^{R}_{P}\square^{K}_{H} : {}^{R}_{P}\boxed{\alpha}^{S}_{Q}$

e.g. $1 : 3 = 3$ □tula PFGH : 9 □tula PFGH, pro area □ti α, vt adeo ſit area $\alpha = +9$, qualium □tulum PFGH, pro menſura omnium quadratorum in P coniugatorum aſſumtum, eſt 1.

II. Pro area □ti β ita inferendum:

1) $PF : Fr = {}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} : {}^{F}_{r}\square^{I}_{\mathfrak{S}}$

---

2) $PF : [PF - Fr] = {}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} : \left[{}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} - {}^{F}_{r}\square^{I}_{\mathfrak{S}}\right]$ ſeu aream β

---

h. e. $1 : (1-4) = 3$ □tula PFGH : [3 □tula - 4. 3 □tula]

ſeu $1 : -3 = 3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : -9 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}$

Eſt ergo area □ti $\beta = -3 \cdot 3 = -9$, qualium eſt ${}^{F}_{P}\square^{G}_{H} = +1.$

III. Pro area □ti δ inferendum erit:

1) $PH : Hq = {}^{R}_{P}\square^{K}_{H} : {}^{\text{ſ}}_{q}\square^{K}_{H}$

---

2) $PH : [PH - Hq] = {}^{R}_{P}\square^{K}_{H} : \left[{}^{R}_{P}\square^{K}_{H} - {}^{\text{ſ}}_{q}\square^{K}_{H}\right]$ ſeu aream δ

---

h. e. $1 : (1-4) = 3$ □tula PFGH : (3 □tula − 4. 3 □tula)

ſeu $1 : -3 = 3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : -9 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}$

Eſt ergo area □ti $\delta = -9$, qualium eſt ${}^{F}_{P}\square^{G}_{H} = +1.$

IV.

IV. Denique pro area □ti γ ita inferendum:

$1)\ PQ : PH = {}^{P}_{r}\boxed{\substack{\text{area}\\ \beta}}{}^{Q}_{\mathfrak{S}} : {}^{P}_{r}\square^{H}_{L}$; h. e. $3 : 1 = -9, {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : -3$ ſeu $-3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}$ (p n. II

$2)\ PH : Hq = {}^{P}_{r}\square^{H}_{L} : {}^{q}_{f}\square^{H}_{L}$

adeoque $PH : [PH - Hq] = {}^{P}_{r}\square^{H}_{L} : \left[{}^{P}_{r}\square^{H}_{L} - {}^{q}_{f}\square^{H}_{L}\right]$ ſeu aream γ

h. e. $1 : (1-4) = -3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : \left[-3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} - 4 \cdot \left(-3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}\right)\right]$

ſeu $1 : -3 = -3 : [-3 - 4 \cdot (-3)]$ ſeu $(-3 + 12 = +$

Eſt ergo area □ti $\gamma = +9$, qualium eſt ${}^{F}_{P}\square^{G}_{H} = +1$.

Tandem arcis □torum α, β, γ et δ ad idem punctum P coniugatorum inuentis, latus quoque cuiuslibet facile exprimi poteſt, modo notetur, per latus quadrati in hoc negotio perpetuo radicem quadratam areae quadratae intelligendum eſſe. Eſt namque

Latus □ti $\alpha = \sqrt{[PQ . PR]} = +\sqrt{[+3 . +3]} = +\sqrt{+9} = +3$.

Latus □ti $\gamma = \sqrt{[Pq . Pr]} = \sqrt{[-PQ . -PR]} = -\sqrt{[-3 . -3]} = -\sqrt{+9} = -3$,
formulae $\sqrt{[-3 . -3]}$ praefigitur ſignum $-$, ad ſitum quadratorum γ et α oppoſitum ſignificandum.

Latus □ti $\beta = \sqrt{[PQ . Pr]} = \sqrt{[PQ . -PR]} = +\sqrt{[+3 . -3]} = +\sqrt{-9}$.

Latus □ti $\delta = \sqrt{[PR . Pq]} = \sqrt{[PR . -PQ]} = -\sqrt{[+3 . -3]} = -\sqrt{-9}$, pro ſ
ſcilicet □ti δ, ipſi β oppoſito, ſignificando.

§. 8. Hic ſatis ſpecioſe obiici poteſt, eiusmodi radices $x = \mp\sqrt{-a^2}$, e. g. $= \mp\sqrt{-9}$, eſſe mere imaginarias, impoſſibiles, et inaſſignabiles, propterea quod ex $-a^2$ nullo modo radix quadrata extrahi poſſit: nec enim

enim eam eſſe $=-a$, nec $=+a$, cum $-a.-a$, item $+a.+a$ det quadratum poſitiuum $=+a^2$, atque adeo omnia quadrata realia, aut aſſignabilia, eſſe poſitiua. At non difficilis ad iſta eſt reſponſio. Praeterquam enim quod calculus ex datis poſſibilibus aut realibus profectus, et axiomatibus indubiis conuenienter tractatus, nullo modo ad impoſſibilia, ad non realia aut inaſſignabilia deducere poſſit, minus recte etiam ſupponi videtur, omnia quadrata realia eſſe poſitiua. Hoc tum demum verum foret, ſi ad vnum idemque punctum P duo ſaltem □ta coniugari poſſent, qualia ſunt □ta α et γ, latitudinem ſcilicet et longitudinem oppoſitam habentia: conſtat enim ex §. V. praeter haec duo, etiam duo alia □ta, β et δ, poſſibilia eſſe et aſſignabilia, quae nempe ſunt ipſis α et γ, deinceps poſita, latitudinis ſcilicet priuatiuae et longitudinis poſitiuae, aut contra, longitudinis priuatiuae et latitudinis poſitiuae. Proinde ſi conſtruendum fuerit □tum negatiuum, c. g. $=-9$, eiusque radix $=\mp\sqrt{-9}$, primo conſtruendum erit □tum poſitiuum $\alpha=+9$, cuius radix quadrata $=\sqrt{+9}=+3$. Quo facto, aut huius latitudo poſitiua PR ſola, $=+3$, ſumatur in parte oppoſita, nempe $Pr=-3$, aut longitudo poſitiua PQ ſola, $=+3$, ſumatur in parte oppoſita, nempe $Pq=-3$, et ex poſitione datis PQ et Pr, aut Pq et PR, compleantur □ta deinceps poſita β et δ: erit (per demonſtr. in §. VII.) area □ti $\beta=-9$, et area □ti $\delta=-9$, tandemque, ſi □ti β radix x dicatur $=+\sqrt{-9}$, alterius δ radix x dicenda erit $=-\sqrt{-9}$, cum □ta β et δ aeque inter ſe oppoſita ſint, vti reliqua duo α et γ, ſitque et $+\sqrt{-9}.+\sqrt{-9}=-9$, et ſimili-

ter $-\sqrt{-9}.-\sqrt{-9}=-9$. Ceterum eiusmodi quantitas imaginaria $\sqrt{-a^2}$; cum ſit $=\sqrt{[+a.-a]}$, intelligibilis euadit per radicem $\square$ti deinceps poſiti, h. e. per $\sqrt{[+a.+a]}$, vel per $\sqrt{[-a.-a]}$. Vbique enim longitudo $\mp a$ aequalis eſt latitudini $\pm a$, niſi quod illic harum alterutra concipienda ſit poſitione, quae datae opponitur.

§. 9. Hactenus de conſtruendis aequationibus quadraticis puris, ſeu incompletis, per omnes 4 caſus poſſibiles α, β, γ et δ. Reſtat vt nunc dicam de conſtructione aequationis quadraticae completae, ſeu affectae
Fig. 3. $x^2-px+q=0$. Sit nimirum (*Fig.* 3.) duarum quantitatum ſumma $=PL=PM=p$, ſemiſumma $=PA=PE=\frac{1}{2}p$, ſemidifferentia $=AK=AR=EI=QE=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; erit duarum quantitatum maior, ſeu duarum radicum aequationis

$$\text{mai. } x=\left\{\begin{matrix}PK=PA+AK\\PI=PE+EI\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2-q)};\ \text{min. } x=\left\{\begin{matrix}PR=PA-AR\\PQ=PE-QE\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}.$$

Eſt enim in Caſu primo	Item in Caſu ſecundo
$\left.\begin{matrix}x^2=\frac{1}{2}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\-px=-\frac{1}{2}p^2-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\+q=\quad+q\end{matrix}\right\}=0.$	$\left.\begin{matrix}x^2=\frac{1}{2}p^2-q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\-px=-\frac{1}{2}p^2+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\+q=+q\end{matrix}\right\}=0.$

Haec igitur aequatio $x^2-px+q=0$, vtrumque caſum, et $x=PK=PI$, et $x=PR=PQ$, ſimul complectitur, horumque quadratorum x^2 vtrumlibet, ſiue PKTI, ſiue PRVQ, repraeſentat $\square$tum aliquod poſitiuum primitiuum
Fig. 1. 2. α ex *Fig.* 1. et 2.

Fig. 3. §. 10. Iam (*Fig* 3.) producantur PK et PI in k et i, factisque $Pk=PK$, $Pa=PA$, $Pr=PR$, item $Pi=PI$, $Pe=PE$, $Pq=PQ$, conſtruantur duo diuerſa $\square$ta γ, nempe $Pkti$ et $Prvq$, quorum illud erit $=Pi.Pk=-PI.-PK=-x.-x=x^2$, hoc autem $=Pq$.

P r

$Pr = -PQ . -PR = -x . -x = x^2$: erit radicum maior $= -x = Pk = Pi = -PK = -PI = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; radicum autem minor $= -x = Pr = Pq = -PR = -PQ = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ adeoque ſumma radicum $= -p$, et haec contrario ſigno affecta $= +p$. Eſt ergo

In caſu primo

$$\left.\begin{array}{l} -x.-x = x^2 = \frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p.-x = px = -\frac{1}{2}p^2 \quad - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ \qquad +q = +q \end{array}\right\} = 0.$$

In caſu ſecundo

$$\left.\begin{array}{l} -x.-x = x^2 = \frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p.-x = -px = -\frac{1}{2}p^2 + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ \qquad +q = +q \end{array}\right\} = 0.$$

Aequatio igitur $(-x)^2 + p.(-x) + q$, ſeu $x^2 - px + q = 0$, in □to γ vtrumque caſum, et $-x = Pk = Pi$, et $-x = Pr = Pq$, ſimul complectitur , eſtque in γ et □tum $Pkti$, et □tum $Prvq$, quadratum poſitiuum deriuatiuum $=$ areae □ti α.

§. 11. *Vlterius* (*Fig.* 3.) ex PI et Pk , item PQ et Pr poſitione datis compleatur vtrumque □tum β , nempe kI et rQ. Quoniam area β eſt ipſi areae α deinceps poſita , eſtque aequatio pro α , $x^2 - px + q = 0$; aequatio pro β reuera erit $-[x^2 - px + q] = 0$, ſeu $-x^2 + px - q = 0$. Quoniam tamen in calculo aequationum ex more *Harriotti* inſtituto etiam area β tractari ſolet vt □tum aliquod $+x^2$, manifeſtam ſcilicet quadrati formam habens (nullam , credo , aliam ob rationem , quam quod area quadrata $-x^2$ *Harriotto* impoſſibilis viſa fuerit) ; in iſthac hypotheſi aequatio pro β ita inueſtiganda videtur. Eſt namque *area maioris* □*ti* $\beta = PI . Pk = PI . -PK$, h. e. $= [\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}] . -[\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$. Proinde ſi huius areae quadratae β latus ſeu radix dicatur x , erit Fig. 3.

 $x^2 =$

$x^2 = -[\tfrac{1}{4}p^2 + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) + \tfrac{1}{4}p^2 - q] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$

eiusque radix $x = \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$

Quare cum ſit *area minoris* □*ti* $\beta = PQ.Pr = PQ.-PR = [\tfrac{1}{2}p - \surd(\,..)].-[\tfrac{1}{2}p - \surd(\,..)]$

erit $x^2 = -[\tfrac{1}{4}p^2 - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) + \tfrac{1}{4}p^2 - q] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$

huius radix $x = \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$

adeoque ſumma radicum $= \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] + \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$, quae ſi, breuitatis gratia, dicatur π, erit ſumma radicum contrario ſigno affecta $= -\pi = -\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] - \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$.

Hinc aequatio pro □to maiore β

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$$
$$-\pi x = \Big[-\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] - \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]\Big].\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$$
$$+q = +q$$

hoc eſt,
$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$$
$$-\pi x = -[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] - \surd[(-\tfrac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$$
$$+q = +q$$

h. e.
$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$$
$$-\pi x = +\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \left\{ \begin{array}{l} -\surd[\tfrac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 + p^2q] \\ \text{ſeu } -q \end{array} \right\}$$
$$+q = \quad +q$$

adeoque $x^2 - \pi x + q = -\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = 2q - 2q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) = 0$

Atque ſic res eodem redit, ac ſi, pro area maiore β, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, adhibita fuiſſet aequatio definiens $-x^2 + px - q = 0$. Eſt enim

$$\left.\begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\ +px = -p.-x = -p.-[\tfrac{1}{2}p + \surd(\;...\;)] = +\tfrac{1}{2}p^2 + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\ -q = \quad = -q \end{array}\right\} \text{add.}$$
$$\ldots \quad \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + q - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) = 0.$$

Similiter pro □to minore β erit

$x^2 =$

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$
$$-\pi x = [-\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}] \cdot \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$$
$$+q = +q$$

h. e. $x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$

$$-\pi x = -[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{[(-\tfrac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]} \\ \text{ſeu } -\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^4 - p^2 q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 + p^2 q)} \\ \text{ſeu } -q \end{array} \right\}$$
$$+q = +q$$

h. e. $$\left. \begin{array}{l} x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ -\pi x = +\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} - q \\ +q = +q \end{array} \right\} = 0.$$

Proinde etiam in area minore β res eodem redit, ac ſi, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, adhiberetur aequatio dïfiniens $-x^2 + px - q = 0$. Eſt enim

$$\left. \begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p \cdot -x = -px = p. -[\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] = +\tfrac{1}{2}p^2. - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ -q = -q \end{array} \right\} = 0$$

§. 12. Denique (*Fig.* 3.) pro □to δ, ipſi □to β oppoſito, erit Fig. 3.
□tum maius $\delta = x^2 = \text{P}i.\text{PK} = -\text{PI}.\text{PK} = -[\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}][\tfrac{1}{2}p - + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]$
$= -[\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]$
eius radix $x = -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$

item □tum minus $\delta = x^2 = \text{P}q.\text{PR} = -\text{PQ}.\text{PR} = -[\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}][\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]$
$= -[\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]$
eius radix $x = -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$

adeoque ſumma radicum, quam breuitatis gratia pono $= \pi$, ſed contrario ſigno affecta $= -\pi = +\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$

Eſt ergo pro □to maiore δ

$$
\begin{array}{l}
x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\
-\pi x \left\{ \begin{array}{l}
= [\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] + \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]] \cdot -\surd[\tfrac{1}{2}p^2 + q \cdot p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] \\
= -(-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] - \surd[(-\tfrac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - p)] \\
= +\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) - \surd(\tfrac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 + p^2q) \\
= +\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) - q
\end{array} \right. \\
+q = \quad +q \\
\hline
\end{array}
$$

adeoque $x^2 - \pi x + q = -\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p^2 + 2q - 2q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) = 0.$

In □to autem minore δ erit

$$
\begin{array}{l}
x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\
-\pi x \left\{ \begin{array}{l}
= [\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] + \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]] \cdot -\surd[\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] \\
= -[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] - \surd[\tfrac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] \\
= +\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) - q
\end{array} \right. \\
+q = \quad +q \\
\hline
\end{array}
$$

$x^2 - \pi x + q = \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + 2q - 2q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) = 0.$

Quam ob rem etiam in vtraque area quadrata δ res eodem redit, ac ſi, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, vteremur aequatione deinceps poſita $-[x^2 - px + q] = 0$, ſeu $-x^2 + px - q = 0$. Eſt enim

Pro area maiore δ

$$
\left. \begin{array}{l}
-x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\
+px = -p \cdot -x = -p \cdot -[\tfrac{1}{2}p + \surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] = +\tfrac{1}{2}p^2 + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\
-q \quad = -q
\end{array} \right\} = 0
$$

Pro area minore δ

$$
\left. \begin{array}{l}
-x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\
+px = -p \cdot -x = -p \cdot -[\tfrac{1}{2}p - \surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] = +\tfrac{1}{2}p^2 - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\
-q \quad = \quad -q
\end{array} \right\} = 0
$$

§. 13. Quae in §. IX. X. XI. XII. de aequationibus quadraticis completis per omnes quatuor caſus poſſibiles α, β, γ, δ exhibendis dicta ſunt, commode illuſtra-

ri

ri poſſunt ope ſchematiſmi (*Fig.* 4.), vbi diuerſae areae partiales ingredientes breuiter dicuntur a, b et d. Nimirum ſub α eſt □tum maius $x^2 = {}^{K}_{P}\square^{T}_{I} = a+4b+4d$; $\frac{1}{2}p\cdot x = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{F}}_{E} = {}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = a+3b+2d$; adeoque $px = 2\cdot{}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = 2a+6b+4d$; $\frac{1}{4}p^2 = {}^{A}_{P}\square^{C}_{E} = a+2b+d$; $q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = {}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{B}}_{I} = a+2b$, et hinc $\frac{1}{4}p^2 - q = (a+2b+d)-(a+2b) = d = {}^{\mathfrak{H}}_{V}\square^{C}_{\mathfrak{A}}$; Contra autem □tum minus $x^2 = {}^{R}_{P}\square^{V}_{Q} = a$; $\frac{1}{2}p\cdot x = {}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = {}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{H}}_{Q} = a+b$, adeoque $px = 2\cdot{}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = 2a+2b$. Fig. 4.

Erit igitur

Pro □to maiore α	Pro □to minore α
$x^2 = {}^{K}_{P}\square^{T}_{I} = a+4b+4d$	$x^2 = {}^{R}_{P}\square^{V}_{Q} = a$
$-px = -2\cdot{}^{P}_{A}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = -2a-6b-4d$	$-px = -2\cdot{}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = -2a-2b$
$+q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = a+2b$	$+q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = a+2b$
$0 = 0 = 0$	$0 = 0 = 0$

Eaedem aequationes prodeunt pro vtroque □to γ, ex inſpectione Figurae facile eliciendae.

Pro □to maiore β	Pro □to minore β
$-x^2 = {}^{P}_{k}\square^{I}_{H} = -a-4b-4d$	$-x^2 = {}^{P}_{r}\square^{Q}_{O} = -a$
$+px = -(-px) = -2\cdot{}^{P}_{a}\square^{I}_{G} = +2a+6b+4d$	$+px = -(-px) = -2\cdot{}^{P}_{a}\square^{Q}_{N} = +2a+2b$
$-q = {}^{P}_{r}\square^{I}_{F} = -a-2b$	$-q = {}^{P}_{r}\square^{I}_{F} = -a-2b$
$0 = 0 = 0$	$0 = 0 = 0$

Easdem

Easdem aequationes pro vtroque □to δ prodire ex inſpectione Figurae manifeſtum eſt.

§. 14. Cum aequationis quadraticae affectae, et radicum reſpondentium dentur quatuor formae ſequentes:

1) $x^2 - px + q = 0$; $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; vel $x - \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = 0$.

2) $x^2 - px - q = 0$; $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; vel $x - \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = 0$.

3) $x^2 + px + q = 0$; $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; vel $x + \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = 0$.

4) $x^2 + px - q = 0$; $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; vel $x + \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = 0$;

patet, pro aequatione generali $x^2 \pm px \mp q = 0$, radicum formam generalem eſſe $x = \mp \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 \pm q)}$, ſeu $x = \succ \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 \succ q)}$, in qua formula ſignum $\succ$ ipſi $\frac{1}{2}p$ et q praefixum denotat ſignum contrarium eius, quo in aequatione nihilo aequali afficiuntur p et q. Et, cum primae et tertiae aequationis, $x^2 \mp px + q = 0$, conſtructionem Geometricam in §. IX. et X. iam dederim; ad naturam aequationis quadraticae plene intelligendam conſultum erit, vt etiam reliquarum duarum aequationum conſtructiones Geometricas per omnes caſus poſſibiles perſequamur.

Tab. II. Fig. 5. §. 15. Pro conſtruenda igitur aequatione ſecunda $x^2 - px - q = 0$, ſit (*Fig.* 5.) ſumma duarum quantitatum $PL = PM = p$, ſemiſumma $= PE = EL = PA = AM \frac{1}{2}p$, ſemidifferentia $= EI = AK = \sqrt{[\frac{1}{4}p^2 - (-q)]} = \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; erit duarum quantitatum ſeu radicum aequationis maior

$$x = \begin{Bmatrix} PK = PA + AK \\ PI = PE + EI \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)},$$ adeoque □tum α

ſeu $PKTI = \frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Iam producantur PI et PK retrorſum in i et k, factisque Pi et $Pk = PI$, item $P\int$ et $P\zeta$, EQ et $AR = EI$, erit

$Pi =$

$$\left.\begin{matrix} Pi = fi + Pf = -PE - EI \\ Pk = \zeta k + P\zeta = -PA - AK \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$$, adeoque □tum $Pitk =$
$[-\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]^2 = \tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$, et radicum minor x
$$= \left\{\begin{matrix} PQ = PE - EQ = PE - EI \\ PR = PA - AR = PA - AK \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$$, conſequenter huius □tum
γ ſeu $PQVR = \tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$. Eſt enim
□tum $mltſ +$ □tum $Pſm\zeta \quad = -\tfrac{1}{2}p . -\tfrac{1}{2}p + (\tfrac{1}{4}p^2 + q) = \tfrac{1}{2}p^2 + q$
et □lum $Rbm\zeta$ + [□lum $Q\,fbV$ + $\left\{\begin{matrix}\text{□tum } Vbmn \\ \text{ſeu □tum } mltſ\end{matrix}\right\}$] $= 2.[-\tfrac{1}{2}p . -\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}] = p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$.
conſequenter ſubtrahendo habebitur $mltſ + Pſm\zeta - mltſ - Rbm\zeta - Q\,fbV$
= □to $PQVR = \tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$, vt ante. Erit ergo

In caſu $x = PI = PK$

$$\left.\begin{array}{llll} x^2 = \tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = PI.PK & & = & \text{□tum } PITK \\ -px = -\tfrac{1}{2}p^2 \quad - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = -PL.PK & & = & -\text{□lum } PL\varsigma K \\ -q = \quad -q & = PQ.PK = -LI.L\varsigma & = & -\text{□lum } LIT\varsigma \end{array}\right\} = 0.$$

Et in caſu $x = PQ = PR$ erit

$$\left.\begin{array}{llll} x^2 = \tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = PQ.PR & & = & \text{□tum } PQVR \\ -px = -\tfrac{1}{2}p^2 \quad + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = Rk.QV & & = & +\text{□lum } RVwk \\ -q = \quad -q & = PQ.PK = \text{□lum } PQ\theta K & = & -\text{□lum } PQwk \end{array}\right\} = 0.$$

§ 16, Pro conſtruenda aequatione quarta $x^2 + px - q = 0$, ſit (*Fig. 6.*) Fig. 6.

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} Pi = PE + Ei \\ Pk = PA + Ak \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} \\ \left.\begin{matrix} PQ = PE - EQ = PE - Ei \\ PR = PA - AR = PA - Ak \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} \end{matrix}\right\} \text{ ſumma } = -p = PL$$

adeoque factum $= Pk\,PQ = Pi.PR = \tfrac{1}{4}p^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 + q) = -q$

Ergo in caſu $x = Pi = Pk$ erit

$$\left.\begin{array}{llll} x^2 = \tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = Pi.Pk & & = & \text{□tum } Pitk \\ +px = -\tfrac{1}{2}p^2 \quad - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = -PL.Pk & & = & -\text{□lum } PL\varrho k \\ -q = \quad -q & = PQ\,Pk = -Li.L\varrho & = & -\text{□lum } Lit\varrho \end{array}\right\} = 0.$$

Et in caſu $x = PQ = PR$ erit

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} = PQ.PR \qquad = \square\text{tum } PQVR \\ +px = -\frac{1}{2}p^2 \quad + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} = -PL.PR = QI.QV = \square\text{lum } QIGV \\ -q = \quad -q \qquad = Pi.PR = PI.PR = -\square\text{lum } PIGR \end{array}\right\} = 0$$

§. 17. Nunc conſtruamus aequationis ſecundae $x^2 - px - q = 0$, deinceps poſitam $-[x^2 - px - q] = 0$, ſeu $-x^2 + px + q = 0$, vel $x^2 - \pi x - q = 0$. Eſt namque

Fig. 5. (*Fig.* 5.) $\square$tum β, ſeu $PIHk = PI.-PK = [\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]\ -[\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]$ (§. XV.).

h. e. $x^2 = -[\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}] = -\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$

adeoque $x = \sqrt{\square}$ti $PIHk = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$ et $\square$tum oppoſitum δ, ſeu $PQvr = Pr.PQ = -PR.PQ = -[\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]\,[\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]$ (§. XV.)

h. e. ſecundum $x^2 = -[\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}] = -\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$

adeoque ſecunda $x = \sqrt{\square}$ti $PQvr = -\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$ (§. VIII).

Erit ergo ſumma radicum (quam pono $= \pi$), ſed contrario ſigno affecta

$= -\pi = -\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$,

et factum radicum $= \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}.'\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$

$= '\sqrt{[(-\frac{1}{4}p^2 - q)^2 - p^2(\frac{1}{4}p^2+q)]}$

$= '\sqrt{[\frac{1}{16}p^4 + \frac{1}{2}p^2q + q^2 - \frac{1}{4}p^4 - p^2q]} = '\sqrt{q^2}$

$= -q$,

Proinde pro $\square$to β erit

$x^2 = -\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} \ldots\ldots = \square$tum $PIHk = -\square$tum $PITK$

$-\pi x = [-\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}]\ \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$

$= -[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}] + -\sqrt{q^2}$

$= +\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} + q = -\square$tum $PIHk - \square$lum $PI\eta R = +\square$tum $PITK + \square$lum $PIcr$.

$-q = \quad -q \ldots\ldots\ldots = \qquad + \square$lum $PI\eta R = \qquad -\square$lum $PIcr$.

quorum ſumma vtrobique eſt $= 0$, vti eſſe debebat.

Simili-

Similiter pro $\Box$to δ ſeu $PQvr$ erit

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + x)} \ldots\ldots = \Box\text{tum } PQvr = -\Box\text{tum } PQVR$$

$$-\pi x = [-\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}] \cdot \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}$$

$$= -[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}] + \sqrt{q^2}$$

$$= +\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} + q = -\Box\text{tum } PQvr - \Box PI\eta R = +\Box\text{tum } PQVR + \Box PIcr.$$

$$-q = \quad -q \ldots\ldots\ldots \quad = \quad +\Box PI\eta R = \quad -\Box PIcr.$$

quorum ſumma vtrobique eſt $= 0$.

§. 18. Tertia aequatio erat $x^2 + px + q = 0$; adeoque eius deinceps poſita eſt $-[x^2 + px + q] = 0$, ſeu $-x^2 - px - q = 0$, vel $x^2 + \pi x + q = 0$. Ad hanc conſtruendam ſit (Fig. 3.) ſub γ), $\left\{\begin{matrix} Pe \\ Pa \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p$, et $\left\{\begin{matrix} ei = eq \\ ak = ar \end{matrix}\right\} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$; Fig. 3.

erit $\left\{\begin{matrix} Pi = Pe + ei \\ Pk = Pa + ak \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$ } ſumma $= -p$; factum $= \tfrac{1}{4}p^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 - q) = +q$.

et $\left\{\begin{matrix} Pq = Pe - eq \\ Pr = Pa - ar \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$ } $= \Box Picr = \Box PqZk$.

hinc $\Box$tum maius $Pitk = \tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$

$\Box$tum minus $Pqvr = \tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$

Ergo pro maiore $\Box$to δ, ſeu pro $PKi\tau$ erit

$$x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$

eiusque radix $x = \sqrt{\Box}$ti $PKi\tau = -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$ (§. VIII).

Pro minore $\Box$to δ, ſeu pro $PqwR$ erit

$$x^2 = -(\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$

eiusque radix $x = \sqrt{\Box}$ti $PqwR = -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$ (§. VIII).

adeoque ſumma radicum (quam pono $= -\pi$), ſed contrario ſigno affecta

$$= +\pi = +\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}}$$

et factum $= -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} \cdot -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$

$$= +\sqrt{[(-\tfrac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]} = +\sqrt{[\tfrac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 + p^2q]} = +\sqrt{q^2}$$

$$= +q,$$

Ergo pro $\square$to maiore δ erit

$$
\begin{array}{llll}
x^2 = -\frac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q) & = \square\text{tum } Pi\tau K & & = -\square\text{tum } Pi'k \\
+\pi x = [\surd[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q)] + \surd[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q)]] \cdot -\surd[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q)] & & & \\
= -[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q)] & -\surd q^2 & & \\
= +\frac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q) & -q = -\square\text{tum } Pi\tau K + \square Pq\zeta K & & = +\square\text{tum } Pitk - \square PqZk \\
\underline{+q =} & \underline{+q =} & \underline{-\square Pq\zeta K =} & \underline{+\square PqZk}
\end{array}
$$

adeoque, deletis, quae ſe mutuo deſtruunt, ſumma vtrobique eſt $= 0$. Eodem plane modo reperietur, etiam pro $\square$to minore δ eſſe $x^2 + \pi x + q = 0$. Calculus enim idem eſt, niſi quod, loco $-p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$, nunc ſcribendum ſit $+p\surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$, et contra, figurae autem calculo reſpondentes deſumendae ſint
Fig. 3. ex *Figurae* 3. areis minoribus δ et γ.

§. 19. Quarta aequatio erat $x^2 + px - q = 0$, cuius deinceps poſita eſt $-[x^2 + px - q] = 0$, ſeu $-x^2 - px + q = 0$, vel $x^2 + \pi x - q = 0$. Ad hanc
Fig. 6. conſtruendam ſit (*Fig.* 6. ſub γ et α)

$$
\left\{\begin{array}{l} Pi = PE + Ei \\ Pk = PA + Ak \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}p - \surd(\frac{1}{4}p^2 + p);\text{ et } \left\{\begin{array}{l} PQ = PE - EQ = PE - Ei \\ PR = PA - AR = PA - Ak \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}p + \surd(\frac{1}{4}p^2 + q).
$$

hinc ſub γ erit $\square$tum maius $Pitk = \frac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$

et ſub α $\square$tum minus $PQVR = \frac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$

Ergo pro maiore $\square$to δ ſeu $Pi\tau K$ erit

$$x^2 = -[\frac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)] = -\frac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$$

eiusque radix $x = \surd\,\square\text{ti } Pi\tau K = -\surd[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)]$ (§. VIII).

et pro minore $\square$to β ſeu $PQvr$ erit

$$x^2 = -[\frac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)] = -\frac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$$

eiusque radix $x = \surd\,\square\text{ti } PQvr = +\surd[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)]$, (§ VIII.), adeoque ſumma radicum (quam pono $= -\pi$), ſed contrario ſigno affecta

$$+\pi = +\surd[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)] - \surd[-\frac{1}{2}p^2 - q + \surd(\frac{1}{4}p^2 + q)]$$

et factum $= -\surd[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)]\surd[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)]$

$$= -\surd[(-\frac{1}{2}p^2 - q)^2 - p^2(\frac{1}{4}p^2 + q)] = -\surd[\frac{1}{4}p^4 + p^2q + q^2 - \frac{1}{4}p^4 - p^2q] = -\surd q^2$$

$$= -q.$$

Hinc

Hinc pro maiore $\square$to δ erit

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} \quad = \square\text{tum } Pi\tau K = -\square\text{tum } Pitk$$
$$+\pi x = [+\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}] - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}$$
$$= -[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - q\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] + \sqrt{q^2}$$
$$= +\tfrac{1}{2}p^2 + p + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} + q = -\square\text{tum } Pi\tau K - \square PigR = \square\text{tum } Pitk + \square PIGR$$
$$-q = \qquad -q = \qquad +\square PigR = \qquad -\square PIGR$$

quorum ſumma vtrobique eſt $= 0$.

Similiter pro minore $\square$to β erit

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} \quad = \square\text{tum } PQvr \quad = -\square\text{tum } PQVR$$
$$+\pi x = [+\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}] \cdot \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}$$
$$= -[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] + \sqrt{q^2}$$
$$= +\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} \quad +q = -\square\text{tum } PQvr - \square PI\lambda r = +\square\text{tum } PQVR + \square PIGR$$
$$-q = \qquad -q = \qquad +\square PI\lambda r = \qquad -\square PIGR$$

adeoque, deletis quae ſe mutuo deſtruunt, ſumma vtrobique eſt $= 0$.

§. 20. In §. XVII. conſtruxi aequationis ſecundae, $x^2 - px - q = 0$, deinceps poſitam $x^2 - \pi x - q = 0$. Res tamen eodem redit, ſi, loco huius, conſtruatur aequatio $-[x^2 - px - q] = 0$, ſeu $-x^2 + px + q = 0$. Eſt enim (*Fig.* 5.) $\square$tum maius β, ſeu $PIHk = -\square$tum α, Fig. 5.

$$\left.\begin{array}{l} \text{h. e. } -x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = -\square\text{tum } PITK \\ +px = \qquad\qquad = +\tfrac{1}{2}p^2 + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} = \square PL\varsigma K \\ +q = \qquad\qquad = \qquad +q \qquad = \square LIT\varsigma. \end{array}\right\} = 0$$

Item $\square$tum minus $\delta = -\square$to minori γ.

$$\left.\begin{array}{l} \text{h. e. } -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} = -\square\text{tum } PQVR \\ +px = +\tfrac{1}{2}p^2 \quad -p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} = -\square PQwk \\ +q = \quad +q \qquad\qquad = +\square PQwk \end{array}\right\} = 0$$

Similiter in §. XVIII. conſtruebatur aequationis tertiae $x^2 + px + q = 0$, deinceps poſita $x^2 + \pi x + q = 0$. Interim res eodem redit, ſi, loco huius, conſtrueretur aequa-

tio $-[x^2+px+q]=0$, ſeu $-x^2-px-q=0$. Eſt enim
Fig. 3. (*Fig* 3.) $\square$tum maius $\delta = -\square$tum maius γ,

$$\text{h. e. } \left.\begin{array}{l} -x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2-q+pV(\tfrac{1}{4}p^2-q)] = -\tfrac{1}{2}p^2+q-pV(\tfrac{1}{4}p^2-q) = -\square\text{tum } Pitk \\ -px = 2.Pe.Pk = -p[-\tfrac{1}{2}p-V(\ldots)] = +\tfrac{1}{2}p^2+pV(\tfrac{1}{4}p^2-q) = +2.\square PeYk \\ -q = \quad = \quad = -q \quad = -\square PqZk \end{array}\right\} = 0$$

Item cum ſit $\square$tum minus $\delta = -\square$tum minus γ;

$$\text{erit } \left.\begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2+q+pV(\tfrac{1}{4}p^2-q) = -\square\text{tum } Pqvr \\ -px = +\tfrac{1}{2}p^2 - pV(\tfrac{1}{4}p^2-q) = 2.Pe.Pr = +2\square Pesr \\ -q = -q = -Pq.Pk = -\square PqZk \end{array}\right\} = 0$$

Similiter in §. XIX. conſtruebatur aequationis quartae $x^2+px-q=0$, deinceps poſita $x^2+\pi x-q=0$. Sed res eodem redit, ac ſi, loco huius, conſtrueretur aequatio
Fig. 6. $-[x^2+px-q]=0$, ſeu $-x^2-px+q=0$. Eſt enim (*Fig.* 6.) $\square$tum maius $\delta = -\square$tum maius $\gamma = -[\tfrac{1}{2}p^2+q+pV(\tfrac{1}{4}p^2+q)]$

$$\text{h. e. } \begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2-q-pV(\tfrac{1}{4}p^2+q) = -\square\text{tum } Pitk \\ -px = +\tfrac{1}{2}p^2 + pV(\tfrac{1}{4}p^2+q) = -p[-\tfrac{1}{2}p-V(\tfrac{1}{4}p^2+q)] = \square PL\varrho k = 0. \\ +q = +q = Li.L\varrho = \square Lit\varrho \end{array}$$

Item cum ſit $\square$tum minus $\beta = -\square$tum minus α;

$$\text{erit } \left.\begin{array}{l} -x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2+q-pV(\tfrac{1}{4}p^2+q)] = -\tfrac{1}{2}p^2-q+pV(\tfrac{1}{4}p^2+q) = -\square\text{tum } PQVR \\ -px = -p[-\tfrac{1}{2}p+V(\tfrac{1}{4}p^2+q)] = +\tfrac{1}{2}p^2 - pV(\tfrac{1}{4}p^2+p) = -\square\, QIGV \\ +q = \quad = +q \quad = +\square\, PIGR \end{array}\right\} = 0.$$

§. 21. Expreſſiones radicum pro aequationibus deinceps poſitis, quas in §. XI. XVII. XVIII. et XIX. venatus ſum, nimis ſunt compoſitae, et ad additionem earundem actualem, aut ſubtractionem non accommodatae. Poſſunt tamen eaedem per ſimpliciores formulas exprimi, quarum ope, ſumma, item differentia radicum actu exhiberi poteſt. Ad id praeſtandum inſeruit ſequens

Proble-

Problema.

Datis duabus quantitatibus irrationalibus non communicantibus; inuenire earundem ſummam, itemque differentiam. Et contra: data ſumma, aut differentia duarum eiusmodi quantitatum irrationalium; inuenire quantitates aggregantes aut ſubtrahentes ipſas.

Reſolutio.

Sint quantitates datae $\sqrt{m}$ et $\sqrt{n}$. Ponatur $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{v}$; et $\sqrt{m}-\sqrt{n}=\sqrt{y}$: euehendo ad quadratum, fiet $m+n+2\sqrt{mn}=v$; item $m+n-2\sqrt{mn}=y$, conſequenter ſumma $=\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{[(m+n)+2\sqrt{mn}]}=\sqrt{v}$, et differentia $=\sqrt{m}-\sqrt{n}=\sqrt{[(m+n)-2\sqrt{mn}]}=\sqrt{y}$. *Quod erat primum.* Contra: ſit ſumma e. g. $=\sqrt{[12+\sqrt{140}]}$, item differentia $=\sqrt{[12-\sqrt{140}]}$; quaeruntur Termini additionis et ſubtractionis ipſi. Fiat $\sqrt{[(m+n)+2\sqrt{mn}]}=\sqrt{[12+\sqrt{140}]}=\sqrt{[12+2\sqrt{35}]}$, ponaturque $(m+n)=12$, et $2\sqrt{mn}=2\sqrt{35}$; erit $\frac{m+n}{2}=6$, et $mn=35$,

adeoque $\frac{(m+n)^2}{4}=36$,

ſubtrahatur $\frac{4mn}{4}=35$

fiet $\frac{(m-n)^2}{4}=1$, adeoque $\frac{m-n}{2}=1$ } add. ſubtr.
ſed $\frac{m+n}{2}=6$ }

habebitur $m=6+1=7$, et $n=6-1=5$, conſequenter erit $\sqrt{[12\mp\sqrt{140}]}=\sqrt{m}\mp\sqrt{n}=\sqrt{7}\mp\sqrt{5}$. *Quod erat alterum.*

§. 22. Nunc applicemus iſta ad formulas radicum ſimpliciores pro aequationibus deinceps poſitis inueniendas. In §. XI. (*Fig.* 3. β) erat Fig. 3.

Ima

I^ma^ $x = \sqrt{}\,\square$ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$, et II^da^ $x = \sqrt{}\,\square$ti PQO$r = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$. Fiat igitur $\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = \sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{[(m+n) - 2\sqrt{mn}]}$, ponaturque $\frac{m+n}{2} = \frac{-\frac{1}{2}p^2 + q}{2}$, et $-\sqrt{mn} = -\frac{p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}}{2}$;

erit $\frac{(m+n)^2}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2}{4}$; et $mn = \frac{p^2(\frac{1}{4}p^2 - q)}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2q}{4}$

$\frac{4mn}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2q}{4}$ ſubtr.

fiet $\frac{(m-n)^2}{4} = \frac{1}{4}q^2$, adeoque $\frac{m-n}{2} = \frac{1}{2}q$
ſed $\frac{m+n}{2} = -\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}q$ } add. ſubtr.

habebitur $m = -\frac{1}{4}p^2 + q = -(\frac{1}{4}p^2 - q)$; et $n = -\frac{1}{4}p^2$, conſequenter
$\sqrt{m} - \sqrt{n} = +\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)} - \sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$
vel $= -\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)} + \sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$ } $= \mp\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, vbi inferiora valent qro $x = \sqrt{}\,\square$ti PIHk, ſuperiora autem pro $x = \sqrt{}\,\square$ti oppoſiti aequales P$i\tau$K (per § VIII). Eſt ergo I^ma^ $x = \sqrt{}\,\square$ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} - \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et II^da^ $x = \sqrt{}\,\square$ti PQO$r = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} + \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, quarum radicum ſumma eſt $= +2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} = \frac{2}{2}p\sqrt{-1} = p\sqrt{-1}$, et factum $= -\frac{1}{4}p^2 - [-(\frac{1}{4}p^2 - q)]$ hanc habebit formam $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x - q = 0$, ſeu $x^2 - p\sqrt{-1}\,.\,x - q = 0$.

Fig. 5. Similiter in § XVII. (*Fig.* 5. β et δ) erat I^ma^ $x = \sqrt{}\,\square$ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$, et II^da^ $x = \sqrt{}\,\square$ti PQ$\pi r = -\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$. Fiat ergo $\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]} = \sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{[(m+n) - 2\sqrt{mn}]}$, ponaturque $\frac{m+n}{2} = \frac{-\frac{1}{2}p^2 - q}{2}$; et $-\sqrt{mn} = \frac{-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}}{2}$;

erit $\frac{(m+n)^2}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2q + q^2}{4}$; et $mn = \frac{p^2(\frac{1}{4}p^2 + q)}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2q}{4}$

$\frac{4mn}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2q}{4}$ ſubtr.

fiet $\frac{(m-n)^2}{4} = \frac{1}{4}q^2$, adeoque $\frac{m-n}{2} = \frac{1}{2}q$
ſed $\frac{m+n}{2} = -\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}q$ } add. ſubtr.

habebitur $m = -\frac{1}{4}p^2$; et $n = -\frac{1}{4}p^2 - q = -(\frac{1}{4}p^2 + q)$, conſequenter

$\sqrt{m}-$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{m}-\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}-\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\\ \text{vel } =-\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}+\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\end{array}\right\}=\mp\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)},$$

vbi ſigna inferiora valent pro $x=\sqrt{}$ □ti $PIHk$, ſuperiora utem pro $x=\sqrt{}$ □ti oppoſiti aequalis $Pi\tau K$ (per §. VIII). Eſt ergo

I^ma^ $x=\sqrt{}$ □ti $PIHk=\sqrt{m}-\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}-\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$,

I^da^ $x=\sqrt{}$ □ti $PQvr=\sqrt{m}+\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}+\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$,

quarum ſumma $=+2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}=\tfrac{2}{2}p\sqrt{-1}=+p\sqrt{-1}$; et factum $=-\tfrac{1}{4}p^2-[-(\tfrac{1}{4}p^2+q)]=-\tfrac{1}{4}p^2+\tfrac{1}{4}p^2+q=+q$ Conſequenter aequatio deinceps poſita quaeſita hanc habebit formam $x^2-2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}\,.\,x+q=0$, ſeu $x^2-p\sqrt{-1}\,.\,x+q=0$.

§. 23. Eodem plane modo inueniri poſſunt radices aequationum, quae ſunt (§ XIV) aequationi tertiae $x^2+px+q=0$, et quartae $x^2+px-q=0$, deinceps poſitae, et ex radicibus inuentis aequationes deinceps poſitae ipſae formari. Neque tamen iſto labore opus eſt, cum ex calculo in §. XXII. adhibito manifeſtum ſit, totum negotium breuius expediri poſſe, ſi in quatuor formis aequationum (§ XIV), loco $\mp p$, ſcribatur $\mp 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, et in tertio Termino, loco $\mp q$, ſcribatur $\mp q$, pro reſpondente aequatione deinceps poſita obtinenda; huiusque radices innoteſcent, aut aequationem quadraticam methodo ordinaria reducendo, aut radices in §. XIV. datas transformando, ſi, loco $\mp\tfrac{1}{2}p$, ſcribatur $\mp\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, et in locum $\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}$, vel $\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$, reſpectiue ſurrogetur $\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2-q)}$, vel $+\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$: quem ad modum apparet ex Tabula ſubiecta, in qua numeri vulgares 1, 2, 3, 4 indicant aequationes atque radices

 ordi-

ordinarias, numeri Romani autem I. II. III. IV deſignant reſpondentes aequationes atque radices deinceps poſitas.

1) $x^2 - px + q = 0$; $x = +\tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. α et α

I) $x^2 - 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} . x - q = 0$; $x = +\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3 β et β

2) $x^2 - px - q = 0$; $x = +\tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 5. α et γ

II) $x^2 - 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} . x + q = 0$; $x = +\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$ Fig. 5. β et δ

3) $x^2 + px + q = 0$; $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. γ et γ

III) $x^2 + 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} . x - q = 0$; $x = -\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig 3. δ et δ

4) $x^2 + px - q = 0$; $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 6. γ et α

IV) $x^2 + 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} . x + q = 0$; $x = -\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2} \mp \sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 6. δ et β

Hinc etiam apparet, data aequatione deinceps poſita, peruenire ad reſpondentem aequationem ordinariam, ſi, loco termini tertii $\pm q$, ponatur $\mp q$, et, loco $\mp 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, ponatur $\pm p$; item, illius radicibus datis, inueniri reſpondentes radices ordinarias, pro $\mp \sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, et $\pm \sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$, et $\pm \sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$, reſpectiue ſubſtituendo $\pm \tfrac{1}{2}p$, et $\mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$, et $\pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$.

§. 24 Vt autem duorum quadratorum deinceps poſitorum comparatio inter ſe recte inſtitui poſſit, notanda ſunt ſequentia. Nimirum (*Fig.* 3. α et β) ⊡tis primitiuis

Fig. 3. poſitiuis PITK et PQVR reſpondent ⊡ta priuatiua, ſeu illis deinceps poſita PIHk et PQOr. Proinde, quia area ⊡ti deinceps poſiti PIHk magis deficit ab area ▭torum poſitiuorum PITK aut PQVR, quam deinceps poſitorum alterum PQOr; ⊡tum PIHk minus eſſe cenſendum eſt altero PQOr, illiusque adeo radix minor habenda erit radice huius; etſi res contra habeat, ſi ⊡ta deinceps poſita abſolute inter ſe conſiderentur, ſeu ſine relatione

latione ad aream $\square$ti primitiui poſitiui (*ſub* α). [§. III. VII. n. II. et III.] Vnde etiam mirum non eſt, quod e. g. in §. XXII. (*Fig.* 3. β) $\surd\ \square$ti $PIHk = +\surd$ Fig. 3.
$-\frac{1}{4}p^2 - \surd -(\frac{1}{4}p^2 - q)$, habeat formam radicis minoris, contra autem $\surd\ \square$ti $PQOr = +\surd -\frac{1}{4}p^2 + \surd -(\frac{1}{4}p^2 - q)$, formam radicis maioris; item quod in §. XXII. (*Fig.* 5. β et δ) Fig. 5.
$\surd\ \square$ti $PIHk = +\surd -\frac{1}{4}p^2 - \surd -(\frac{1}{4}p^2 + q)$, radicis minoris formam habeat, ſed $\surd\ \square$ti $PQvr = +\surd -\frac{1}{4}p^2 + \surd -(\frac{1}{4}p^2 + q)$, formam radicis maioris. Breuiter: duo eiusmodi $\square$ta ex α (*Fig.* 3.) et duo $\square$ta ex β, ſecundum congruentiam inter Fig. 3.
ſe comparata conſtituunt proportionem Geometricam.

E. gr. $\left\{\begin{array}{l} \square PITK : \square PQVR = \square PIHk : \square PQOr \\ +25 : +9 = -25 : -9 \end{array}\right\}$; at eadem $\square$ta ſecundum quantitatem arearum inter ſe comparata, faciunt proportionem Arithmeticam.

E. gr. $\left\{\begin{array}{l} \square PITK - \square PQVR = \square PQOr - \square PIHk \\ +25 - +9 = -9 - -25 \end{array}\right\}$, vbi differentia Terminorum vtriusque rationis eſt $= -16$.

§. 25. Quomodo autem eiusmodi radices arearum priuatiuarum ex mente mea in calculo tractandae ſint, in vnico exemplo adiecto oſtendiſſe ſufficit. Nimirum, *ex* §. XXIII. *num II*, ſit conſtruenda aequatio $x^2 - 2\surd -\frac{1}{4}p^2 . x + q = 0$, et quidem (*Fig* 5. β) pro caſu $x = \surd\ \square$ti $PIHk = +\surd -\frac{1}{4}p^2 - \surd -(\frac{1}{4}p^2 + q)$: Fig. 5.

$$\begin{array}{l} \text{erit } x^2 = -\frac{1}{4}p^2 - (\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{2}{2}p\surd[-1 . -(\frac{1}{4}p^2 + q)] \\ \quad = -\frac{1}{2}p^2 \quad - q \quad - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q) \ldots\ldots\ldots = \square PIHk \\ -2\surd -\frac{1}{4}p^2 . x = -2\surd -\frac{1}{4}p^2[\surd -\frac{1}{4}p^2 - \surd -(\frac{1}{4}p^2 + q)] \\ \qquad = -2\surd[-\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p\surd[-1 . -(\frac{1}{4} + q)]] \\ \qquad = +\frac{1}{2}p^2 \quad + p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q) \ldots\ldots = PL.PK = PL.-Pk = -\square PL\Phi k \\ \underline{+ q \quad = \quad + q \qquad \ldots\ldots\ldots = -PQ.PK = LI.L\varsigma = LI.-L\Phi = -\square LIH\Phi} \end{array}$$

quorum ſumma vtrobique eſt $= 0$, et praeterea calculus pariter ac conſtructio ex aſſe conſentit cum §. XX. num. 1.

 §. 26.

§ 26. In omnibus quatuor aequationum quadraticarum formis in § XIV. deſcriptis eſt quadratum ſemiſummae radicum vel $= (+\frac{1}{2}p)^2$, vel $= (-\frac{1}{2}p)^2 = +\frac{1}{4}p^2$, factum autem radicum vel $= +q$, vel $= -q$. Si ponatur $\mp p = 0$; fiet x vel $= \mp \sqrt{-q}$, vel $= \mp \sqrt{+q}$, vel $= \pm \sqrt{-q}$, vel $= \pm \sqrt{+q}$. Si autem ponatur $q = 0$. ſemper radicum vna fiet $= 0$, adeoque euaneſcet, et aequatio quadratica degenerabit in aequationem primae dimenſionis, fietque x vel $= +p$, vel $= -p$: quemadmodum ex inſpectione tabulae in § XIV. datae ſtatim pateſcit. Sed hiſce caſibus ſimplicibus ſepoſitis, perſequamur ſaltem tres caſus compoſitos diuerſos, qui reſultant, quantitates $+\frac{1}{4}p^2$ et $+q$ intet ſe comparando. Aut enim eſſe poteſt 1) $q = \frac{1}{4}p^2$; aut 2) $q < \frac{1}{4}p^2$, ſed tamen $q > 0$, adeoque $q + m^2 = \frac{1}{4}p^2$, ſeu $q = \frac{1}{4}p^2 - m^2$; aut 3) $q > \frac{1}{4}p^2$, adeoque $q = \frac{1}{4}p^2 + m^2$. Ne quis autem excipiat, rectam datam ($+p$ vel $-p$) in duas partes ita ſecari non poſſe, vt ſit rectangulum ſub partibus (q) maius □to partis dimidiae ($\frac{1}{4}p^2$), adeoque caſum tertium eſſe impoſſibilem; monendum eſt, propoſitionem iſtam ſaltem veram eſſe, ſi ponatur, □tum ſemidifferentiae partium eſſe debere □tum poſitiuum. Quoniam autem, praeter □ta poſitiua, etiam dantur □ta priuatiua, eaque realia et aſſignabilia (§. VII. *ſeqq*); vtique fieri poterit, vt □tum ſemidifferentiae partium ſit □tum priuatiuum, adeoque ſemidifferentia $= \sqrt{}$ □ti priuatiui ſeu (ſtylo hactenus vſitato) quantitas imaginaria. Quo in caſu erit et *factum partium* (q) *maius* □*to partis dimidiae* ($\frac{1}{4}p^2$), et *ſumma* □*torum partium minor duplo* □*to partis dimidiae* ($\frac{1}{4}p^2$): quod vtrumque ſecus accidit

cidit in quantitatibus ordinariis, quando ſcilicet □tum ſemidifferentiae eſt □tum poſitiuum. E. gr. ſit $\frac{1}{2}p = 5$, adeoque $\frac{1}{4}p^2 = 25$, ſit porro □tum ſemidifferentiae $= 9$, adeoque ſemidifferentia ipſa $= \sqrt{9} = 3$; erit pars maior $= 5 + 3 = 8$, et minor $+ 5 - 3 = 2$, adeoque factum $q = 8 \cdot 2 = 16$, et ſumma □torum $= 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$, conſequenter, $16 < 25$, ſeu $q < \frac{1}{4}p^2$, et $68 > 2 \cdot 25$, ſeu ſumma □torum $> \frac{2}{4}p^2$, ſeu $34 > 25$, h. e. ſemiſumma □torum $> \frac{1}{4}p^2$. Contra autem in altero caſu ſit, vt ante, $\frac{1}{2}p = 5$, adeoque $\frac{1}{4}p^2 = 25$, ſed □tum ſemidifferentiae $= -9$, adeoque ſemidifferentia ipſa $= \sqrt{-9}$; erit pars maior $= 5 + \sqrt{-9}$, et minor $= 5 - \sqrt{-9}$, adeoque factum $q = (5 + \sqrt{-9})(5 - \sqrt{-9}) = 25 - (-9) = 25 + 9 = 34$, et ſumma □torum $= [5 + \sqrt{-9}]^2 + [5 - \sqrt{-9}]^2 = 25 - 9 + 10\sqrt{-9} + 25 - 9 - 10\sqrt{-9} = 50 - 18 = 32$, conſequenter $34 > 25$, ſeu $q > \frac{1}{4}p^2$, et $32 < 2 \cdot 25$, ſeu ſumma □torum $< \frac{2}{4}p^2$, ſeu $16 < 25$, h. e. ſemiſumma □torum $< \frac{1}{4}p^2$.

§. 27. Proinde *ſi I. ponatur* $q = \frac{1}{4}p^2$; in §. XIV. fiet Fig. 3.

1) $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = + \frac{1}{2}p \mp 0$; adeoque (*Fig.* 3 α) puncta Q et I cadunt in E, eritque I^ma^ $x = \frac{1}{2}p = PE = PA$, et II^da^ $x = \frac{1}{2}p = PE = PA$, h. e. aequatio habebit duas radices poſitiuas aequales. Porro fiet

3) $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = - \frac{1}{2}p \mp 0$; adeoque (*Fig.* 3. γ) puncta q et i cadunt in e, eritque I^ma^ $x = -\frac{1}{2}p = Pe = Pa$, et II^da^ $x = -\frac{1}{2}p = Pe = Pa$, h. e. aequatio habebit duas radices priuatiuas aequales.

 2)

Fig. 5. 2) fiet $x^2 - px - \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$; adeoque (*Fig.* 5. *α et γ*) erit I^ma $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$ $= PI = PE + EI = PE + \sqrt{2PE^2}$, ſeu $PI > 2PE$, h. e. $PI > PL$, et II^da $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PQ$ $= PE - EQ = PE - \sqrt{2PE^2}$, h. e. PQ, abſolute ſpectata erit $< PE$.

Fig. 6. 4) Fiet $x^2 + px - \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$, adeoque (*Fig.* 6. *γ et α*) erit I^ma $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$ $= PE + Ei$, ſeu Pi, abſolute ſpectata, erit $> PL$, et II^da $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PQ = PE - \sqrt{2PE^2}$, h. e. Q cadit inter P et *e*, ſi ſumatur $Pe = PE$.

§. 28. *Si II. ponatur* $q < \frac{1}{4}p^2$, adeoque $q = \frac{1}{4}p^2 - m^2$; in § XIV.

1) fiet $x^2 - px + (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = \frac{1}{2}p$
Fig. 3. $\mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + m^2)} = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{m^2}$, adeoque (*Fig.* 3 *α*) radices PI et PQ cadunt, vti ibidem delineantur, vltra P, cis et vltra punctum E.

3) Fiet $x^2 + px + (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{m^2}$, adeoque (*Fig.* 3. *γ*) radices Pi et Pq cadunt verſus ſiniſtram puncti P, cis et vltra punctum *e*.

2) Fiet $x^2 - px - (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{2}p^2 - m^2)}$,
Fig. 5. adeoque (*Fig.* 5. *α* et *γ*) radices PI et PQ cadunt, illa vltra L, haec inter P et *e*, ſi ſumatur $Pe = PE$.

4) Fiet $x^2 + px - (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{2}p^2 - m^2)}$,
Fig. 6. adeoque (*Fig.* 6. *α* et *γ*) radices PQ et Pi cadunt, illa inter P et *e*, ſi ſumatur $Pe = PE$, haec ad ſiniſtram puncti P, vltra L.

§. 29. *Si denique III. ponatur* $q > \frac{1}{4}p^2$, *adeoque* $q = \frac{1}{4}p^2 + m^2$; in §. XIV.

1) Fiet $x^2 - px + (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 - m^2)} = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{-m^2}$; atque ſic preuenitur ad duas

duas radices, quarum ſemidifferentia ($\sqrt{-m^2}$) radicem □ti priuatiui, ſeu quantitatem imaginariam conſtituit. Quare, cum (*Fig.* 8. α, β, δ), $+\sqrt{-m^2}$ in area β, et $-\sqrt{-m^2}$ in area δ aſſignanda ſit (§. VIII.); erit radicum Fig. 8.

$$\text{maior } x = \sqrt{\square\text{ti PECA}} + \sqrt{\square\text{ti EI}\omega\psi} = \sqrt{\square\text{ti PECA}} + \sqrt{\square\text{ti P}fgh}$$

$$\text{maior } x = \sqrt{\square\text{ti PECA}} \left\{ \begin{matrix} -\sqrt{\square\text{ti EI}\omega\psi} \\ \text{h.e } +\sqrt{\square\text{ti AK}ol} \end{matrix} \right\} = \sqrt{\square\text{ti PECA}} \left\{ \begin{matrix} -\sqrt{\square\text{ti P}fgh} \\ \text{h.e } +\sqrt{\square\text{ti P}bca} \end{matrix} \right\}$$

3) Fiet $x^2 + px + (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 - m^2)} = -\frac{1}{2}p + \sqrt{-m^2}$; atque ſic denuo peruenitur ad duas radices, quarum ſemidifferentia ($\sqrt{-m^2}$) eſt radix □ti priuatiui, ſeu quantitas imaginaria. Quare cum (*Fig.* 9. γ, δ, β), $-\sqrt{-m^2}$ in area δ, et $+\sqrt{-m^2}$ in area β aſſignanda ſit (§. VIII.); erit radicum Tab III. Fig 9.

$$\text{I}^{\text{ma}}\, x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{-m^2} = \sqrt{\square\text{ti P}eca} \left\{ \begin{matrix} +\sqrt{\square\text{ti }ei\omega\psi} \\ \text{ſeu } \sqrt{\square\text{ti P}fgh} \end{matrix} \right\} = -\sqrt{\square\text{ti PECA}} - \sqrt{\square\text{ti P}d5b}.$$

$$\text{II}^{\text{da}}\, x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{-m^2} = \sqrt{\square\text{ti P}eca} + \sqrt{\square\text{ti }ako'} \left\{ \begin{matrix} -\sqrt{\square\text{ti }ei\omega\psi} \\ -\sqrt{\square\text{ti P}fgl} \end{matrix} \right\} = -\sqrt{\square\text{ti PECA}} + \sqrt{\square\text{ti P}d5b}.$$

2) Fiet $x^2 - px - (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$, et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + m^2)}$, adeoque (*Fig.* 5. α et γ) radices PI et PQ cadunt, vti ibidem delineantur, et quidem tanto magis vltra L et *e*, quo maior fuerit quantitas *m*. Fig. 5.

4) Fiet $x^2 + px - (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$, et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + m^2)}$, adeoque (*Fig.* 6. α, γ) radices PQ et P*i* cadunt tanto magis vltra *e* et L, quo maior fuerit quantitas *m*. Fig. 6.

§ 30. Ex hac omnium caſuum aequationis quadraticae enumeratione et conſtructione (§. XXVII. XXVIII. XXIX.)

mani-

manifeſtum fit, in ea reſoluenda nunquam perueniri ad quantitates imaginarias, niſi vtraque radix vel poſitiua, vel priuatiua fuerit, vt factum poſſit eſſe $= + q$, et praeterea fuerit $q > \frac{1}{4}p^2$. Inter 24 enim radices poſſibibes diuerſas, quas in §. XXVII. XXVIII. XXIX. exhibui, non niſi 4 radices dantur, quae ſint quantitatibus imaginariis quaſi deformatae. Nec tamen propterea exiſtimandum eſt, radicum imaginariarum in calculo interuentum fore rariſſimum: occurrunt enim frequentius, quam inexpertus quisque opinari poſſit, praeſertim quando de aequationibus cubicis, altioribusque reſoluendis agitur. Satis enim conſtat, aequationem cubicam, imo etiam altiorem quamcunque, reſolui non poſſe, niſi ea ante ad quadraticam reducta fuerit; haec autem frequentiſſime ita comparata eſt, vt eius radix vtraque ſit vel poſitiua, vel priuatiua, et praeterea factum radicum maius ſit quadrato ſemiſummae, quo in caſu ſemidifferentia radicum non poteſt non eſſe quantitas imaginaria (§. XXIX *num* 1. et 3). Vt taceam aequationum quadraticarum ordinariarum deinceps poſitas, quarum radices omnes ex meris quantitatibus imaginariis ſunt conflatae (§ XXIII). Quae cum ita ſint, optandum eſſet, vt, abiecta perſuaſione de quantitatum imaginariarum impoſſibilitate atque inaſſignabilitate, earundem Theoria magis magisque excolatur. Hac in lucem protracta, via, ſi quid mei iudicii eſt, aperta erit ad aequationes altiores exacte reſoluendas, imo etiam radicum ad aequationes cubicas pertinentium conſtructiones genuinae dari poterunt.

§. 31. Haud parum facit ad naturam quantitatum imaginariarum penitius perſpiciendam, ſi duae aequationes

nes quadraticae ſequentes $x^2 \pm px + q = 0$, et $x^2 \pm px + Q = 0$, vbi (*per hyp.*) eſt $Q > q$, diſtincte euoluantur: quemadmodum apparet ex Tabula ſubiecta. Nimirum ſit

In caſu I.		In caſu II.
$\mp \frac{1}{2}p$ . . . . $\frac{1}{4}p^2$ . . . . per hyp. ſit $+\frac{1}{4}d^2$ . . . $\mp \frac{1}{2}d$ . . . . (et quidem $\frac{1}{2}d < \frac{1}{2}p$.)	Semiſumma radicum □tum ſemiſummae □tum ſemidifferentiae ſemidifferentia	. . . $\mp \frac{1}{2}p$ . . . . $\frac{1}{4}p^2$ ſit $-\frac{1}{4}d^2$ (per hyp.) . . . $\mp \sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
erit $\mp \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}d$ . . . $\mp \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}d$ . . .	Radix maior — — minor	. . . $\mp \frac{1}{2}p + \sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$ . . . $\mp \frac{1}{2}p - \sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
$+q = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$ . . .	Factum = □ ſemiſ. — □ ſemidiff.	. . . $\frac{1}{4}p^2 - (-\frac{1}{4}d^2) = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 = +Q$
$\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}pd + \frac{1}{4}d^2$ $\frac{1}{4}p^2 \pm \frac{1}{2}pd + \frac{1}{4}d^2$	□tum maioris, vel min. □tum minoris, vel mai.	. . . $\frac{1}{4}p^2 \mp p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} + (-\frac{1}{4}d^2)$ . . . $\frac{1}{4}p^2 \pm p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} + (-\frac{1}{4}d^2)$
$\frac{2}{4}p^2 \quad + \frac{2}{4}d^2$ $\frac{1}{4}p^2 \quad + \frac{1}{4}d^2$	Summa □torum ſemiſumma □torum = □ ſemiſ. + □ ſemidiff.	. . . $\frac{2}{4}p^2 \quad + 2\,(-\frac{1}{4}d^2)$ . . . $\frac{1}{4}p^2 \quad + 1.(-\frac{1}{4}d^2)$ $= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$
$\frac{2}{2}pd = p.d$ . . . $\frac{1}{2}pd = p.\frac{1}{2}d$ . .	differentia □torum ſemidifferentia □torum = Summa . ſemidifferentia	. . . $2p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} = p.2\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$ . . . $p.\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
$q + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}p^2$ . . . Ergo $q < \frac{1}{4}p^2$, ſeu factum $<$ □to ſemiſ.	□tum ſemiſummae = factum + □ ſemidiff.	$Q + (-\frac{1}{4}d^2) = Q - \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}p^2$ Ergo $Q > \frac{1}{4}p^2$, ſeu factum $>$ □to ſemiſ.
et, ob $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 > \frac{1}{4}p^2$, erit ſemiſ. □ □ $>$ □ ſemiſ.		et, ob $\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2 < \frac{1}{4}p^2$, erit ſemiſ. □ □ $<$ □to ſemiſ.

§. 32. Hos duos caſus inter ſe conferenti patebit etiam

1) eſſe factum caſus I $=$ ſemiſ. □□ caſus II $= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$. Et contra

2) eſſe ſemiſummam □□ caſus I $=$ facto caſus II $= \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2$. Et contra

Hinc ſequens formula generalis F inſeruit et □to ſemiſummae, et ſemiſummae □torum, et facto radicum, et □to ſemidifferentiae in vtroque caſu ſimul repraeſentandis.

$$F \text{ - - - - - } = \frac{1}{4}p^2 \mp \frac{1}{4}d^2. \quad \text{Nam}$$

Si ponatur $d = 0$; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 \mp 0 = \frac{1}{4}p^2 =$ □to ſemiſummae in vtroque caſu.

Si ponatur $p = 0$, valeatque ſignum inferius, fiet $F = 0 + \frac{1}{4}d^2 = + \frac{1}{4}d^2$ $=$ □to ſemidifferentiae caſus I.

Si ponatur $p = 0$, valeatque ſignum ſuperius; fiet $F = 0 - \frac{1}{4}d^2 = - \frac{1}{4}d^2$ $=$ □to ſemidifferentiae Caſus II.

Vtroque autem membro retento,

Si valeat ſignum inferius; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 =$ ſemiſ. □□ caſus I. $=$ facto caſus II.

Si valeat ſignum ſuperius; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2 =$ facto caſus I. $=$ ſemiſ. □□ caſus II.

§. 33. Nunc progredior ad aequationes cubicas. Harum conſtructio ſupponit notitiam Formularum generalium pro radicibus ex data aequatione cubica extrahendis. Etſi vero Formulae iſtae, ſub titulo *Regularum Cardani*, ſatis notae ſint; iuuat tamen easdem alia methodo, magis naturali et paulo commodiore, in quam ante annos complures incidi, eruere, et additamentis, quae ad reliquas duas radices determinandas pertinent, illuſtrare: praeſertim cum eo ipſo *Regulae Cardani*, quae multis ſuſpectae videri ſolent, valde confirmentur. Nimirum aequationes cubicae, ſecundo Termino ſublato, reducuntur ad hos

qua-

quatuor Caſus: I. $v^3 * - pv - q = 0$; II. $v^3 * + pv - q = 0$; III. $v^3 * - pv + q = 0$; IV. $v^3 * + pv + q = 0$. In Caſu I. fiat $v = y * + mpy^{-1}$; erit

$$\left.\begin{array}{l} v^3 = y^3 + 3mpy + 3m^2p^2y^{-1} + m^3p^3y^{-3} \\ -pv = \quad - \quad py - \quad mp^2y^{-1} \\ -q = \qquad\qquad -q \end{array}\right\} = 0.$$

Iam ponatur $3mp - p = 0$; erit $3m - 1 = 0$, et $m = \frac{1}{3}$, adeoque $3m^2p^2 - mp^2 = \frac{3}{9}p^2 - \frac{1}{3}p^2 = 0$. Ex quo fit $\left.\begin{array}{l} y^3 ** + \frac{1}{27}p^3y^{-3} \\ \quad -q \end{array}\right\} = 0$, et, per y^3 multiplicando, $y^6 - qy^3 + \frac{1}{27}p^3 = 0$, quam aequationem quadraticam ad duas ſimplices reducendo, et ex his radicem cubicam extrahendo, fit $y = [\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3}$. Vnde, ob $v = y + \frac{mp}{y}$, prodit $v = [\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3} + \frac{\frac{1}{3}p}{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3}}$. Eſt autem $\frac{1}{3}p = [\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3} \cdot [\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{2}{27}p^3)}]^{1:3}$, vti actu multiplicando patet, adeoque $\frac{\frac{1}{3}p}{[\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3}} = [\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3}$. Ergo, ſiue ſigna inferiora, ſiue ſuperiora valere debere ponas, erit $v = [\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3} + [\frac{1}{2}q^2 - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]^{1:3}$. Quae eſt ipſa *Regula Cardani* pro Caſu I: in qua de ſignis $+$ et $-$ notandum eſt, cubum $\frac{1}{27}p^3$ affici eodem, quantitatem autem $\frac{1}{2}q$ contrario ſigno, reſpectu ſignorum, quibus quantitates p et q in aequatione nihilo aequali I. afficiuntur.

§. 34. Quodſi porro in aequationibus propoſitis I. II. III. IV, loco p et q, reſpectiue ponatur 3 P et 2 Q; *Regulae Cardani* concinnius exprimi poterunt.

 Fiet

Fiet nempe, attendendo ad Regulam de ſignis modo datam,

in caſu I. $v = [Q + \sqrt{}(Q^2 - P^3)]^{1:3} + [Q - \sqrt{}(Q^2 - P^3)]^{1:3}$

II. $v = [Q + \sqrt{}(Q^2 + P^3)]^{1:3} + [Q - \sqrt{}(Q^2 + P^3)]^{1:3}$

III. $v = [-Q + \sqrt{}(Q^2 - P^3)]^{1:3} + [-Q - \sqrt{}(Q^2 - P^3)]^{1:3}$

IV. $v = [-Q + \sqrt{}(Q^2 + P^3)]^{1:3} + [-Q - \sqrt{}(Q^2 + P^3)]^{1:3}$.

§. 35. Quoniam autem in omnibus his quatuor caſibus aeqnatio cubica reſpondens habere debet tres radices v; valor quoque pro v in §. XXXIV. inuentus, qui (breuitatis gratia) dicatur $A + B$, ſeu $+ 1.(A + B)$, re vera triplex eſſe debet, vt quamcunque libet trium radicum aequationis repraeſentare poſſit. Quoniam tamen adhuc dum deſideratur methodus extrahendi radicem cubicam ex data quantitate irrationali compoſita (ea enim, quae in *Elementis Algebrae* communiter tradi ſolet; rem, vt erat, inconfectam relinquit), ita vt in hoc difficili negotio multum indulgendum ſit diuinationibus repetitis, et examini ſubiectis; admodum contenti ſumus horum trium valorum vnum ſaltem, quem primum radicem aequationis, ſeu $1) v$, dicimus, ex formula determinaſſe, cum, ex hoc cognito, reliqui valores, absque vlla diuinatione, certa methodo, per reſolutionem aequationis quadraticae haberi poſſint. Nimirum ad reliquas duas radices inueniendas fiat factor ſimplex $v - (A + B) = 0$, per quem cum diuiſibilis eſſe debeat aequatio cubica reſpondens, e. g. I^{ma} $v^3 * - 3Pv - 2Q = 0$, diuiſione actu inſtituta, erit reſiduum diuiſionis $= (A + B)^3 * - 3P(A + B) - 2Q$, h. e. $= v^3 * - 3Pv - 2Q = 0$,

$=0$, quotus autem dabit hanc aequationem quadraticam $v^2+(A+B)v-[3P-(A+B)^2]=0$, qua reducta, prodibit

$2)v=\frac{-(A+B)}{2}+\frac{\sqrt{[12P-3(A+B)^2]}}{2}$; et $3)v=\frac{-(A+B)}{2}-\frac{\sqrt{[12P-3(A+B)^2]}}{2}$.

Eſt autem (per caſ. I. in §. XXXIII. $P=\frac{1}{3}p=A.B$; hoc igitur valore, loco P, ſubſtituto, habebitur

$2)v=\frac{-(A-B)}{2}+\frac{\sqrt{-3(A-B)^2}}{2}=\frac{-(A+B)}{2}+\frac{(A-B)\sqrt{-3}}{2}=\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}.A+\frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}.B$;

$3)v=\frac{-(A+B)}{2}-\frac{(A-B)\sqrt{-3}}{2}=\frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}.A+\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}.B$.

In caſibus II. III. et IV eadem methodo tractatis deuenitur ad easdem plane pro 2) v et pro 3) v Formulas. Quamuis enim in caſu II et IV. reperiatur 2) v, vel $3)v=-\frac{(A+B)}{2}\pm\frac{\sqrt{[-12P-3(A+B)^2]}}{2}$, ita vt nunc, loco $+12P$, habeatur $-12P$; iſta tamen Formularum diuerſitas ſaltem apparens eſt, cum inſpectio formularum ex §. XXXIV. facile doceat, hic non eſſe factum $A.B=+P$, ſed potius $=-P$, conſequenter $-12P=+12A.B$, vt ante.

§. 36. Si in data aequatione cubica reperiatur valor ipſius $(A+B)$, ſeu pro 1) v, negatiuus; commoditatis gratia conſultum eſt, vt, valore affirmatiuo reſpondente aſſumto, 1) v exprimatur per $-1.(A+B)$. Quo facto, erit $2)v=\frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}.A+\frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}.B$; $3)v=\frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}.A+\frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}.B$.

§. 37. Ob eam, quam in §. XXXV. commemoraui, difficultatem, haud raro inſuperabilem, extrahendi radicem cubicam ex data quantitate irrationali compoſita, viſum eſt, in uſum ſequentium, hic adiicere non-

nonnullas eiusmodi Formulas ſpeciales, vt, praeciſa calculi difficultate atque prolixitate, hinc excerpi poſſint. Harum autem veritas, actu multiplicando, facile explorari poterit.

$(\mp 1+\sqrt{-3})(\pm 1-\sqrt{-3})=+4$; $(-1\mp\sqrt{-3})^2(-1\pm\sqrt{-3})=-4\mp 4\sqrt{-3}$.

$(-1\mp\sqrt{3})^3=+8=2^3$; $(-1\mp\sqrt{-3})^2=2.(-1\pm\sqrt{-3})$; $(\mp\sqrt{-3})^3=-8=(-2)^3$.

$(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1})=+5$; $(1-2\sqrt{-1})^2+3(2\sqrt{-1}+1)=+2\sqrt{-1}$.

$(1-2\sqrt{-1})^3=-11+2\sqrt{-1}$; $(-1\pm\sqrt{-1})^2=+2\pm 2\sqrt{1}$; $a^3(1-2\sqrt{-1})^3=-11a^3+2a^3$

$(-1\mp\sqrt{3})^3=-10\mp 6\sqrt{3}$; $(-10+6\sqrt{3})^{1:3}.(-10-6\sqrt{3})^{1:3}=(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=-8^{1:3}$

$(-10+6\sqrt{3})^{2:3}.(-10-6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-10+6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-1+\sqrt{3})=+2-2\sqrt{3}$.

$(-10-6\sqrt{3})^{2:3}.(-10+6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-10-6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-1-\sqrt{3})=+2+2\sqrt{}$

$(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}\sqrt{-3})^3=3\mp\tfrac{10}{9}\sqrt{-3}$; $(3+\tfrac{10}{9}\sqrt{-3})^{1:3}.(3-\tfrac{10}{9}\sqrt{-3})^{1:3}=(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}\sqrt{-3})(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{6}\sqrt{-3})$.

$=+\tfrac{7}{3}$.

$(-1+\sqrt{-1})^2=-2\sqrt{-1}$; $(1+\sqrt{-1})^2=+2\sqrt{-1}$; $(-1-\sqrt{1})^2=+2\sqrt{-1}$; $(1-\sqrt{-1})^2=-2$

His praemiſſis, quae ad reſolutionem aequationis cubicae pertinent, nunc agamus de conſtructione radicum eiusmodi aequationis, etſi easdem tantum non ſemper quantitates imaginariae ingrediantur.

§. 38. Sint quatuor rectangula α, β, γ, δ,
Fig. 10. ad idem punctum P coniugata, et pro baſibus *parallelepipedorum* poſſibilium ad P coniugatorum aſſumta, ſitque praeterea P T altitudo poſitiua (ſurſum tendens) $=+c$, et P t altitudo priuatiua (deorſum tendens) $=-c$: orientur octo *parallelepipeda* diuerſa ad P coniugata, et quidem quatuor capacitatis poſitiuae $+abc$, reliqua quatuor autem capacitatis priuatiuae $-abc$. Nimirum erit *parallelepipedum poſitiuum*

1)

1) α. PT $=(+a.+b).+c=+abc$; 2) γ. PT $=(-a.-b).+c=+abc$.
3) β. P$t=(+a.-b).-c=+abc$; 4) δ. P$t=(-a.+b).-c=+abc$.
Similiter erit *parallelepipedum priuatiuum*
1) γ. P$t=(-a.-b).-c=-abc$; 2) α. P$t=(+a.+b).-c=-abc$;
3) β. PT $=(+a.-b).+c=-abc$; 4) δ. PT $=(-a.+b).+c=-abc$.

§. 39. Pro *parallelepipedo* igitur poſitiuo dantur quatuor caſus diuerſi. Aut enim omnes tres dimenſiones ſunt poſitiuae; aut quaecunque binae dimenſiones priuatiuae eſſe poſſunt, tertia poſitiua exiſtente. Similiter pro *parallelepipedo* priuatiuo quatuor occurrunt caſus diuerſi. Aut enim omnes tres dimenſiones ſunt priuatiuae; aut quaecunque binae dimenſiones poſſunt eſſe poſitiuae, tertia priuatiua exiſtente (§. XXXVIII).

§. 40. Iam in area α ponatur $a=b=c$; orientur 8 Cubi ad idem punctum P coniugati, quorum quatuor ſunt capacitatis poſitiuae $+a^3$, reliqui quatuor autem capacitatis priuatiuae $-a^3$ (§. XXXVIII.): quoniam in Cubo α.PT, in meros cubulos aequales reſoluto, horum cubulorum vnus $=1.1.1=+1$, aſſumitur pro menſura omnium cuborum ad P coniugatorum. Fig. 10.

§. 41. Proinde ſi octo illi Cubi coniugati abſolute conſiderantur, erunt et capacitates omnium aequales, et ſingula ſingulorum latera inter ſe aequalia: at vero eosdem ex ſitu Cubi primitiui α.PT aeſtimando, nec ſingula ſingulorum latera aequalia ſunt, nec capacitates omnium aequales erunt, ſed eorum quatuor ſunt capacitatis poſitiuae $+a^3$, reliqui quatuor autem priuatiuae capacitatis $-a^3$. Eſt namque ſolus Cubus α,PT primitiuus, reliqui autem omnes ſunt ex illo deriuatiui. Hi enim omnes

ſunt

ſunt illi deinceps poſiti, vel quoad vnicam dimenſionem, vel quoad duas, vel denique quoad omnes tres dimenſiones (§. XXXVIII. XXXX): in quo caſu poſtremo, qui prodit, *Cubus*, dicitur illi α,PT *oppoſitus*. Si itaque Cubi longitudo, latitudo et altitudo primitiua reſpectiue dicatur $+L$, $+l$, $+A$, adeoque longitudo, latitudo, et altitudo deinceps poſita reſpectiue exprimatur per $-L$, $-l$, $-A$; tabula ſubiecta vno obtutu oſtendet Cubos primitiuo α.PT deinceps poſitos, et quidem quoad quam, vel quasnam dimenſiones, vna cum eorundem capacitate: vbi ſequens ſignum (′′) [illegible], appenda eſſe ex linea prima $+l$, $+L$, $+A$.

			Capacitates
Cubus primitiuus.	α.PT	$+l$, $+L$, $+A$	$+a^3$
Cubi primitiuo diuerſimode deinceps poſiti.	β.PT	$-l$, ′′, ′′	$-a^3$
	γ.PT	$-l$, $-L$, ′′	$+a^3$
	δ.PT	′′, $-L$, ′′	$-a^3$
	α.Pt	′′, ′′, $-A$	$-a^3$
	β.Pt	$-l$, ′′, $-A$	$+a^3$
	γ.Pt	$-l$, $-L$, $-A$	$-a^3$
	δ.Pt	′′l, $-L$, $-A$	$+a^3$

Ex huius Tabulae inſpectione quoque apparet, hic quatuor dari binorum Cuborum ſibi inuicem oppoſitorum copulas ſequentes.

1) α.PT, et γ.Pt; 2) β.PT, et δ.Pt
3) α.Pt, et γ.PT; 4) β.Pt, et δ.PT.

§. 42. Hinc aequatio cubica pura $x^3 = a^3$, ſeu $x^3 * * - a^3 = 0$, ſimul definit 1) Cubum α.PT; 2) Cu-

2) Cubum γ.PT; 3) Cubum β.Pt; 4) Cubum δ.Pt (§. XXXXI), adeoque erit I. $x^3 = + a . + a . + a$; II. $x^3 = - a . - a . + a$; III. $x^3 = + \sqrt{-a^2} . + \sqrt{-a^2} . - a$; IV. $x^3 = -\sqrt{-a^2} . -\sqrt{-a^2} . -a$ (§. XXXVIII. XXXIX. XXXX. 8).

§. 43. Similiter aequatio cubica pura $x^3 = -a^3$, ſeu $x^3 ** + a^3 = 0$, ſimul definit 1) Cubum γ.Pt; 2) Cubum α.Pt; 3) Cubum β.PT; 4) Cubum δ.PT (§. XXXXI), ita vt nunc ſit 1) $x^3 = - a . - a . - a$; 2) $x^3 = + a . + a . - a$; 3) $x^3 = + \sqrt{-a^2} . + \sqrt{-a^2} . + a$; 4) $x^3 = -\sqrt{-a^2} . -\sqrt{-a^2} . + a$ (§. XXXVIII. XXXIX. XXXX. 8).

§. 44. Quia igitur aequatio cubica pura $x^3 ** \pm a^3 = 0$, quatuor cubos coniugatos, et ſitu inter ſe diuerſos, aut, ſi valeat ſignum ſuperius, his oppoſitos quatuor (§. XXXXI. XXXXII) ſimul definit; propterea eadem ipſa nondum ſatis determinata eſt ad latera ſeu radices Cubi primi, aut ſecundi, aut tertii, aut quarti indicandas, ſed aequatio $x^3 ** - a^3 = 0$, ſaltem indicat, Cubi, cuius capacitas eſt $= + a^3$, radicem, ſeu latus x, ſeu $\sqrt[3]{+ a^3}$, aeque eſſe poſſe $= \sqrt[3]{(-a . -a . + a)}$, aut $= \sqrt[3]{(+\sqrt{-a^2} . + \sqrt{-a^2} . - a)}$, aut $= \sqrt[3]{(-\sqrt{-a^2} . - \sqrt{-a^2} . - a)}$, quam $= \sqrt[3]{(+a . + a . + a)}$, littera a latus Cubi primitiui α.PT denotante, nec tamen determinat, quinam horum quatuor caſuum poſſibilium valere debeat, ſed id ſaltem docet, quemlibet horum trium cuborum deriuatiuorum, ſeu deinceps poſitorum aequalium, e. g. cubum β.Pt, abſolute, ſeu ſine relatione ad ſitum ipſius α.PT, conſideratum, tranſire in Cubum aliquem primitiuum ipſi α.PT aequalem, cum in iſta conſideratione, et longitudo $+\sqrt{-a^2}$ abeat

in $+a$, et latitudo $+\sqrt{-a^2}$ in $+a$, et altitudo $-a$ in $+a$ (§. XXXXI). Eodem modo, aequatio $x^3 * * + a^3 = 0$, nihil amplius oſtendit, niſi quod Cubi, cuius capacitas eſt $= -a^3$, radix, ſeu latus x, ſeu $\sqrt[3]{-a^3}$, aeque eſſe poſſit $= \sqrt[3]{(+a . + a . - a)}$, aut $= \sqrt[3]{(+\sqrt{-a^2} . + \sqrt{-a^2} . + a)}$, aut $= \sqrt[3]{(-\sqrt{-a^2} . - \sqrt{-a^2} . + a)}$, quam $= \sqrt[3]{(-a . -a . a)}$, littera a itidem latus cubi primitiui α.PT deſignante, et quemlibet horum cuborum deinceps poſitorum aequalium, e. g. Cubum β.PT, ſine relatione ad ſitum cubi γ.Pt ipſi α.PT oppoſiti conſideratum, tranſire in Cubum ipſi γ.Pt aequalem, cuius et longitudo, et latitudo et altitudo abeat in $-a$ (§. XXXXI).

§. 45. Etſi vero aequatio generalis $x^3 * * - a^3 = 0$, re vera habeat tres radices, ita vt ſit 1) $x = +a = +1 . a$; 2) $x = \frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2} . a$; 3) $x = \frac{(-1 - \sqrt{-3})}{2} . a$ (quem ad modum intelligitur, ſi in §. XXXIV. ponatur $3P = 0$; tum enim in caſu I. et II. fit 1) $x = A + B = A + 0 = 1 . A$, in caſu autem III et IV. fit 1) $x = A + B = 0 + B = 1 . B$, adeoque in §. XXXV. fit $12P = 0$, et hinc, in caſu I et II, 2) x vel 3) $x = -\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{-3} . A = (\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}) . A$, in caſu autem III et IV. 2) x vel 3) $x = -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} . B = (\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}) . B$); quarum trium radicum haec eſt conditio, vt ſit ſumma radicum $= 0$, ſumma productorum ex binis $= 0$, et factum omnium vt $+1$; nihilo minus tamen iſtae tres radices non valent pro vllo quatuor cuborum poſitiuorum in §. XXXXII. deſcriptorum (§. XXXXIV), ſed id ſaltem indicant, ſi aequationes completae, pro ſingulis iſtis quatuor diuerſis cubis definiendis diuerſae, dentur,

tur, eaedemque ita transformentur, vt Terminus ſecundus, aeque vti in aequatione generali reſpondente, deficiat; quacunque libet trium radicum pro prima aſſumta, tres aequationis transformatae radices hanc inter ſe relationem tenere, vt $+1$; $\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}$; $\frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}$, atque adeo, vna radice cognita, reliquas promte inueniri poſſe. Eſt autem $\frac{(-1\mp\sqrt{-3})}{2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\tfrac{3}{4}}$. Quare cum, poſito ſinu toto $= +1$, et ſemiperipheria circuli $= \pi$, ſit coſ. $0\pi =$ coſ. $2\pi = +1 =$ coſ. 4π, aut in genere $=$ coſ. $2k\pi$, littera k quemlibet numerum integrum denotante; coſ. $\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$; ſin. $\frac{2}{3}\pi = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$; patet, in aequatione cubica pura $x^3 ** - a^3 = 0$, tres eius radices hanc inter ſe relationem tenere, vt $+1$; $-\frac{1}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\tfrac{3}{4}}$; $-\frac{1}{2} - \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\tfrac{3}{4}}$; hoc eſt, vt coſ. $2k\pi$; coſ. $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{-1}\,.$ ſin. $\frac{2}{3}\pi$; coſ. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{-1}\,.$ ſin. $\frac{2}{3}\pi$; et duarum poſtremarum factum eſſe vt $(\text{coſ.}\ \frac{2}{3}\pi)^2 + (\text{ſin.}\ \frac{2}{3}\pi)^2 = +1 = (\text{coſ.}\ 2k\pi)^2$, factum denique omnium trium radicum, $+1\,.\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = +1$, eſſe vt coſ. $2k\pi\,.\,(\text{coſ.}\ 2k\pi)^2 = (\text{coſ.}\ 2k\pi)^3$, ſeu vt cubum ſinus totius, cuius baſis, $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = 1$, aequatur quadrato ſinus totius. Breuiter: hic Cubus mentitur formam Cubi $\gamma.PT^2$ ex §. XXXXI.

§. 46. Similiter aequatio generalis $x^3 ** + a^3 = 0$, habet quidem ſuas tres radices, ita vt ſit 1) $x = -a = -1.a$; 2) $x = \left(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}\right).a$; 3) $x = \left(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}\right).a$ (§. XXXVI), huius ſcilicet conditionis, vt ſit ſumma radicum $= 0$, ſumma factorum ex binis $= 0$, et factum omnium vt -1; hae tamen tres radices non valent pro vllo quatuor cuborum priuatiuorum in §. XXXXIII. deſcriptorum (§. XXXXIV),

 ſed

ſed id ſaltem oſtendunt, ſi habeantur aequationes completae definientes, pro ſingulis iſtis quatuor diuerſis cubis diuerſae; eaedemque ita transformentur, vt Terminus ſecundus, aeque vti in aequatione generali reſpondente, deficiat; quacunque libet trium radicum pro prima aſſumta, tres aequationis transformatae radices eſſe inter ſe, vt -1; $\left(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}\right)$; $\left(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ (§. XXXVI); atque ſic, vna radice cognita, reliquas, ope huius relationis, expedite formari poſſe. Eſt autem $\frac{+1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$. Vnde cum, poſito ſinu toto $= +1$, et ſemiperipheria $= \pi$, ſit coſ. $\pi = -1 =$ coſ. $3\pi =$ coſ. 5π, aut in genere $=$ coſ. $(2k+1)\pi$, littera k quemlibet numerum integrum denotante, et praeterea ſit coſ. $\frac{1}{3}\pi = +\frac{1}{2}$, ſin $\frac{1}{3}\pi = \sqrt{\frac{3}{4}}$; perſpicuum eſt, in aequatione cubica pura $x^3 ** + a^3 = 0$, tres eius radices hanc inter ſe relationem habere, vt -1; $+\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$; $+\frac{1}{2}-\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$, h. e. vt coſ. $(2k+1)\pi$; coſ. $\frac{1}{3}\pi + \sqrt{-1}\,.$ ſin. $\frac{1}{3}\pi$; coſ. $\frac{1}{3}\pi - \sqrt{-1}\,.$ ſin $\frac{1}{3}\pi$; et duarum poſtremarum factum eſſe vt (coſ. $\frac{1}{3}\pi)^2 +$ (ſin. $\frac{1}{3}\pi)^2$ $= 1 = (-1)^2 =$ [coſ. $(2k+1)\pi]^2$, ſeu vt quadratum radicis primae; factum denique ex omnibus tribus radicibus, $-2\,.\left(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}\right) = -1$, eſſe vt coſ. $(2k+1)\pi$. [coſ. $(2k+1)\pi]^2 =$ [coſ. $(2k+1)\pi]^3$, ſeu vt cubum cubo ſinus totius oppoſitum (§. XXXXI), cuius baſis eſt quadratum, prioris baſi quadratae oppoſitum Vt adeo hic Cubus videatur mentiri formam Cubi α. P t ex §. XXXXI.

§. 47. Quia autem ex aequatione cubica completa Terminus ſecundus tollitur, ſingulas eius tres radices x, h. e. omnes tres Cubi dimenſiones, eadem quantitate data,

data, nempe ſubtripla ſumma radicum ($\frac{1}{3}m$), in caſu §. XXXXV. minuendo, in caſu §. XXXXVI. augendo; perſpicuum eſt, per modo dictam aequationis cubicae completae transformationem, in aequatione reſultante figuram quantitatis trium dimenſionum $[(x \mp \frac{1}{3}m)^3 = v^3]$, de cuius radicibus inueniendis agitur, non mutari, ſed eam manere cubicam, imo etiam differentias radicum in aequatione transformanda et transformata manere easdem. Et, cum in iſto negotio ponendum ſit $v = x \mp \frac{1}{3}m$; patet quoque, valorem cuiuslibet radicis v ad minimum binomii formam habiturum, etſi in aequatione transformanda valor cuiuslibet radicis x monomii formam habere ponatur. Tandem id quoque intelligitur, ſi, ob $v \pm \frac{1}{3}m = x$, ſingulis tribus radicibus diuerſis v inuentis adiiciatur ſubtripla ſumma radicum ($\mp \frac{1}{3}m$), eo ipſo prodire debere ſingulas tres radices x aequationis cubicae completae propoſitae.

§. 48. Iam perſequamur aequationes completas ipſas pro ſingulis quatuor Cubis poſitiuis in §. XXXXII. commemoratis. Cum Cubum α. P T ſolum definiat haec aequatio $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$; ob rationes in §. XXXXV. et XXXXVI. allatas, ponatur $x = v + a$: fiet $v^3 * * * = 0$, ſeu $v = 0$, eritque (per §. XXXV.) 1) $v = +1 . 0 = 0$; 2) $v = \frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2} . 0 = 0$; 3) $v = \frac{(-1 - \sqrt{-3})}{2} . 0 = 0$, et hinc, ob $x = v + a$, habetur 1) $x = 0 + a = +a$; 2) $x = 0 + a = +a$; 3) $x = 0 + a = +a$. Habet igitur Cubus primitiuus α. P T tres radices poſitiuas, *etiam quoad formam expreſſionis*, inter ſe aequales.

Sit aequatio Cubum γ.PT ſolum difiniens $x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 = 0$: ponendo $x = v - \frac{1}{3}a$, fiet $v^3 * - \frac{4}{3}a^2v - \frac{16}{27}a^3 = 0$, eritque (per §. XXXIV.) $v = [\frac{8}{27}a^3 + \sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3})}]^{1:3} + [\frac{8}{27}a^3 - \sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3})}]^{1:3}$. Eſt autem $\sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3}a^6)} = 0$. Erit ergo $v = \sqrt[3]{\frac{8}{27}a^3} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = +1 . \frac{4}{3}a$, h. e. 1) $v = A + B = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a$; et hinc 2) $v = (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) . \frac{2}{3}a + (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}) . \frac{2}{3}a = -1 . \frac{2}{3}a = -\frac{2}{3}a$; et 3) $v = (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}) . \frac{2}{3}a + (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) . \frac{2}{3}a = -\frac{2}{3}a$ (§. XXXV.), adeoque, ob $x = v - \frac{1}{3}a$, habetur 1) $x =$ 1) $v - \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}a = +a$; 2) $x =$ 2) $v - \frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = -a$; 3) $x =$ 3) $v - \frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = -a$. Proinde in Cubo deriuatiuo γ.PT expreſſiones trium radicum $+a$, $-a$, et $-a$, non habent formam radicum aequalium, etſi in eodem abſolute conſiderato omnes tres radices ſeu dimenſiones re vera aequales exiſtant (§. XXXXI).

Pro Cubo β Pt aequatio definiens eſt $x^3 - (2\sqrt{-a^2} - a)x^2 - (2a\sqrt{-a^2} + a^2)x - a^3 = 0$. Faciendo $x = v + \frac{2\sqrt{-a^2} - a}{3}$, fiet $v^3 * - \frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v - \frac{(4a^3 - 4a^2\sqrt{-a^2})}{27} = 0$, et hinc $v = [\frac{2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2}}{27} + \sqrt{(\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} - \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3} + [\ldots - \sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$ (§. XXXIV). Quare cum ſit $\sqrt{(\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} - \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})} = 0$; fiet $v = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})} + \frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$ h. e (per § XXXVII.) erit 1) $v = \frac{1}{3}a(-1 - \sqrt{-1}) + \frac{1}{3}a(-1 - \sqrt{-1}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}, -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} = +1 . (-\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$; et hinc 2) $v = (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = +\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$; et 3) $v = (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = +\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$. Vnde, ob $x = v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a$, fit 1) $x =$ 1) $v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -a$; 2) $x =$ 2) $v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = +\sqrt{-a^2}$; et 3) $x =$ 3) $v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$

$\sqrt{-a^2} + -\frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = + -\sqrt{-a^2}$. Examen radicis e. g. ſecundae et tertiae facile inſtituitur. Debebit enim eſſe in aequatione definiente $(\sqrt{-a^2})^3 - (2\sqrt{-a^2} - a) . -a^2 - (2a\sqrt{-a^2} + a^2) . \sqrt{-a^2} - a^3 = 0$, h. e. $-a^2\sqrt{-a^2} + 2a^2\sqrt{-a^2} - a^3 + 2a^3 - a^2\sqrt{-a^2} - a^3 = 0$.

Denique Cubus δ . Pt definitur per hanc aequationem: $x^3 + (2\sqrt{-a^2} + -a)x^2 + (2a\sqrt{-a^2} - a^2)x - a^3 = 0$. Ponendo $x = v - \frac{(2\sqrt{-a^2} + a)}{3}$, fiet $v^3 * + \frac{2a\sqrt{-a^2}}{3} v - \frac{(4a^3 + 4a^2\sqrt{-a^2})}{27} = 0$ et hinc (§. XXXIV) $v = [\frac{2a^3 + 2a^2\sqrt{-a^2}}{27} + \sqrt{(\frac{(2a^3 + 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} + \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3} + [\ldots - \sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$. Quare cum reperiatur pars irrationalis $\mp\sqrt{(\ldots .)} = 0$; fiet (per §. XXXVII) $v = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})}$ $= \frac{1}{3}a(-1 + \sqrt{-1}) + \frac{1}{3}a(-1 + \sqrt{-1})$, h. e. erit

1) $v = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}, -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} = + 1 . (-\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$, adeoque

2) $v = (\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = + \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^3}$;

3) $v = (\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = + \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$.

Hinc prodit 1) $x =$ 1) $v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -a$;

2) $x =$ 2) $v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$; item

3) $x =$ 3) $v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$.

§. 49. Eodem modo tractemus aequationes cubicas completas, per quas definiuntur Cubi priuatiuae capacitatis in §. XXXXIII. deſcripti. Nimirum cubum γ . Pt definit haec aequatio $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 0$, quae, ponendo $x = v - a$, transformatur in hanc, $v^3 *** = 0$, adeoque ob $v = 0$, erit 1) $v = -1 . 0 = 0$; 2) $v = (\frac{\pm 1 + \sqrt{-3}}{2}) . 0 = 0$; 3) $v = (\frac{\pm 1 - \sqrt{-3}}{2}) . 0 = 0$ (§. XXXVI). Vnde, ob $x = v - a$, habetur 1) $x = 0 - a = -a$; item 2) $x = -a$; et 3) $x = -a$. Habet igitur Cubus γ . Pt, primitiuo α . PT oppoſitus, tres radices priuatiuas, *etiam quoad formam expreſſionis*, inter ſe aequales.

Pro

Pro Cubo α. P t aequatio definiens eſt haec: $x^3 - ax^2 - a^2x + a^3 = 0$, quae, ponendo $x = v + \frac{1}{3}a$, tranſit in hanc: $v^3 * - \frac{4}{3}a^2 v + \frac{16}{27}a^3 = 0$. Vnde fit (§. XXXIV.)

$v = [-\frac{8}{27}a^3 + \sqrt{}(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3}a^6)]^{1:3} + (\ldots - \sqrt{}(\ldots))^{1:3} = \sqrt[3]{} - \frac{8}{27}a^3 + \sqrt[3]{} - \frac{8}{27}a^3$, h. e. 1) $v = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a = -1.\frac{4}{3}a$; et hinc 2) $v = (\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a + (\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a = +\frac{2}{3}a$; et 3) $v = (\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a + (\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a = +\frac{2}{3}a$ (§. XXXVI). Vnde, ob $x = v + \frac{1}{3}a$, habetur 1) $x = 1)v + \frac{1}{3}a = -\frac{4}{3}a + \frac{1}{3}a = -a$; 2) $x = 2)v + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = +a$; et 3) $x = 3)v + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = +a$.

Cubus β. P T definitur per hanc aequationem: $x^3 - (2\sqrt{-a^2} + a)x^2 + (2a\sqrt{-a^2} - a^2)x + a^3 = 0$. Haec, ponendo $x = v + \frac{2\sqrt{-a^2} + a}{3}$, transformatur in ſequentem $v^3 * + \frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v + \frac{4a^3 + 4a^2\sqrt{-a^2}}{27} = 0$. Ex qua fit (§. XXXIV) $v = [-\frac{(2a^3 + 2a^2\sqrt{-a^2})}{27} + \sqrt{}(\frac{(2a^3 + 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} + \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})]^{1:3} + [-\ldots - \sqrt{}(\ldots)]^{1:3}$. Reperitur autem duorum cuborum particularium pars irrationalis $\mp\sqrt{}(\ldots) = 0$; Erit ergo $v = [\frac{-(2a^3 + 2a^2\sqrt{-a^2})}{27}]^{1:3} + [-\frac{(2a^3 + 2a^2\sqrt{-a^2})}{27}]^{1:3}$, adeoque (per §. XXXVII.) erit 1) $v = -\frac{1}{3}a\sqrt[3]{}(2 + 2\sqrt{-1}) - \frac{1}{3}a\sqrt[3]{}(2 + 2\sqrt{-1}) = -\frac{1}{3}a(-1 + \sqrt{-1}) - \frac{1}{3}a(-1 + \sqrt{-1}) = +\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} = -1.(-\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$; et hinc

2) $v = (\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{+1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$;
3) $v = (\frac{+1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$.
Conſequenter, ob $x = v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a$, habetur 1) $x = 1)v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = +a$; 2) $x = 2)v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = +\sqrt{-a^2}$; et 3) $x = 3)v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = +\sqrt{-a^2}$.

Cubus denique δ. P T ita definitur: $x^3 + (2\sqrt{-a^2} - a)x^2 - (2a\sqrt{-a^2} - a^2 + a^2)x + a^3 = 0$. Haec, ponendo $x = v - \frac{(2\sqrt{-a^2} - a)}{3}$, tranſit in hanc: $v^3 * - \frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v + \frac{(4a^3 - 4a^2\sqrt{-a^2})}{27} = 0$,

eritque

eritque $v = [-\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})}{27} + \sqrt{(\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} - \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3} + [-\ldots - \sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$, vbi cum reperiatur pars irrationalis $\mp\sqrt{(\ldots)} = 0$; fiet $v = -\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}, -\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}$, ſeu $v = -\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{-1})$, $-\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{-1})$ (§. XXXVII) $= \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2}$. Cum itaque ſit 1) $v = -1\,(-\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2}$; erit 2) $v = (\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$; et 3) $v = \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + \frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$. Vnde, ob $x = v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a$, habetur

1) $x = 1)v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = +a$;

2) $x = 2)v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$;

3) $x = 3)v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$.

§. 50. Quodſi ergo Formulae ex §. XXXXVIII. et XXXXIX. inter ſe conferantur, apparebit, quales eſſe debeant aequationes atque radices pro Cubis inter ſe oppoſitis. Nimirum ſi fuerit 1) $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = 0$; adeoque 1) $x = \mp a$; 2) $x = \mp a$; 3) $x = \mp a$; valentibus ſignis inferioribus, prodit aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo α, P T; ſi autem valeant ſigna ſuperiora, habebitur aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo oppoſito γ. Pt (§. XXXXI).

Si fuerit 2) $x^3 \pm (2\sqrt{-a^2} + a)x^2 + (2a\sqrt{-a^2} - a^2)x \mp a^3 = 0$, adeoque 1) $x = \mp a$; 2) $x = \mp\sqrt{-a^2}$; 3) $x = \mp\sqrt{-a^2}$: ſi ſigna inferiora valeant, habetur aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo β. P T; ſi autem valeant ſigna ſuperiora, pro Cubo oppoſito δ. Pt (§. XXXXI).

Si fuerit 3) $x^3 \pm ax^2 - a^2x \mp a^3 = 0$; adeoque 1) $x = \pm a$; 2) $x = \mp a$; 3($x = \mp a$; adhibendo ſigno inferiora, prodit aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo α. Pt; ſed, ſignis ſuperioribus vtendo, pro Cubo oppoſito γ. PT (§. XXXXI).

 Denique

Denique 4) Si fuerit $x^3 \pm (2\sqrt{-a^2}-a)x^2-(2a\sqrt{-a^2}+a^2)x \pm a^3 = 0$, adeoque 1) $x = \pm a$; 2) $x = \mp \sqrt{-a^2}$; 3) $x = \mp \sqrt{-a^2}$: valentibus ſignis inferioribus habetur aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo β. Pt; ſin autem ſigna ſuperiora adhibentur, pro Cubo oppoſito δ. PT (§. XXXXI).

§. 51. Quodſi paullo attentius conſideremus octo illos Cubos (§. XXXXII. XXXXIII.) ad idem punctum P coniugatos, et abſolute conſiderando inter ſe aequales; apparebit, inter eos tantum dari duos, nempe Cubum α. PT et γ. Pt, eius conditionis, vt eorum omnes tres radices, etiam quoad formam expreſſionis, inter ſe aequales ſint (quo in caſu, ſecundo Termino in aequatione definiente ſublato, tota aequatio transformata, $v^3 * * * = 0$, nulleſcit), reliquos vero 6 Cubos eius conditionis eſſe, vt duae ſaltem radices, ſeu dimenſiones, etiam quoad formam expreſſionis, inter ſe aequales exiſtant (quo in caſu, terminum ſecundum in aequatione definiente tollendo, in aequatione transformata ſolus Terminus ſecundus deficit, et in Formula pro 1) v valor partis irrationalis $\mp\sqrt{(Q^2+P^3)}$ fit $=0$) (§. XXXXVIII. XXXXIX). Quodſi ergo Cubus deriuatiuus per aequationem definientem propoſitus, talis fuerit, vt trium radicum, aut dimenſionum (re vera aequalium) nulla alteri, quoad formam expreſſionis, aequalis ſit, tum nec eſſe poterit pars irrationalis $\mp\sqrt{(Q^2+P^3)} = 0$, ſed cubus propoſitus aeque bene ad duos Cubos ex illis octo in §. XXXXII. et XXXXIII. deſcriptis, reduci poterit, e. g. vel ad Cubum γ. Pt, vel ad Cubum α. Pt, quorum ſcilicet ſolae baſes inter ſe oppoſitae ſunt. E. gr. ſit aequatio biquadratica pura $x^4 * * * - a^4 = 0$, ſeu $(x^2-a^2)(x^2+a^2) = 0$, cuius adeo

adeo radices ſunt $+a$; $-a$; $+\sqrt{-a^2}$; $-\sqrt{-a^2}$. Hac aequatione, per factorem ſimplicem $x-a=0$, diuiſa, oritur haec cubica: $x^3+ax^2+a^2x+a^3=0$, cuius forma a formis in §. L. datis diſſidere videtur. Iam ponamus, huius radices (quae ſunt $-a$; $+\sqrt{-a^2}$; $-\sqrt{-a^2}$) ignorari, et demum, methodo ordinaria adhibita, eſſe inueſtigandas. Ponendo igitur $x=v-\frac{1}{3}a$, fiet $v^3 * +\frac{2}{3}a^2v +\frac{20}{27}a^3=0$, et hinc $v=[\frac{-10a^3}{27}+\sqrt{(\frac{10^2}{27^2}a^6+\frac{2^3}{9^3}a^6)}]^{1:3} +[-\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}=\frac{1}{3}a[-10+6\sqrt{3}]^{1:3}+\frac{1}{3}a[-10-6\sqrt{3}]^{1:3} =\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})$ (§. XXXVII) $=-\frac{2}{3}a$. Cum itaque ſit $1)v=A+B=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})$; erit
$2)v=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})+\frac{1}{3}a(1-\sqrt{3})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})=\frac{1}{3}a(1+3\sqrt{-1})=\frac{1}{3}a+\sqrt{-a^2}$;
$3)v=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})=\frac{1}{3}a(1-3\sqrt{-1})=\frac{1}{3}a-\sqrt{-a^2}$.
Vnde, ob $x=v-\frac{1}{3}a$, habetur $1)x=1)v-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a=-a$;
$2)x=2)v-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a+\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$;
$3)x=3)v-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a-\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\sqrt{-a^2}$; atque adeo tres radices inuentae coincidunt cum tribus radicibus aliunde cognitis. Iam vero ex §. VII. et *Fig* 10. conſtat, Fig. 10.
quantitatem imaginariam $+\sqrt{-a^2}$, in area β, alteram autem, $-\sqrt{-a^2}$, in area δ aſſignandam eſſe, ita quidem, vt, pro baſi Cubi aſſignanda, ſi $+\sqrt{-a^2}$ explicetur per latitudinem Pr ex quadrato β ſumtam, $-\sqrt{-a^2}$ explicanda ſit per longitudinem Pq ex □to δ ſumtam; et contra, ſi $+\sqrt{-a^2}$ explicetur per longitudinem PQ ex □to β ſumtam, $-\sqrt{-a^2}$ explicanda ſit per latitudinem PR ex □to δ ſumtam. In priore igitur caſu fiet baſis Cubi = facto $+\sqrt{-a^2}.-\sqrt{-a^2} = Pr.Pq =$ □to $\gamma = -a.-a=+a^2$; in poſteriore autem caſu $= PQ.PR =$ □to $\alpha = +a.+a=+a^2$. Quare cum tertia (ſeu inuentarum prima) radix $-a$ explican-

 da

da ſit per altitudinem deorſum ſumtam Pt; ex his tribus dimenſionibus aſſignatis orietur in priore caſu Cubus γ. P$t = + a^2 . - a = - a^3$, in poſteriore autem caſu Cubus α. P$t = + a^2 . - a = - a^3$. Examen radicis ſecundae et tertiae facile inſtituitur. Eſt enim $x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 = (\mp \sqrt{-a^2})^3 + a . - a^2 + a^2 . \mp \sqrt{-a^2} + a^3 = \pm a^2 \sqrt{-a^2} - a^3 \mp a^2 \sqrt{-a^2} + a^3 = 0$.

§. 52. Tandem conſideremus eiusmodi aequationem cubicam, in qua tres cubi reſpondentes nec quoad formam expreſſionis, nec abſolute conſiderati inter ſe aequales ſunt: manifeſtum eſt, eam continere debere tres radices, et quoad formam expreſſionis, et abſolute conſideratas, inter ſe inaequales, et harum primam valere debere pro ſingulis tribus dimenſionibus Cubi primi, ſecundam pro ſecundi, tertiam pro tertii ſingulis tribus dimenſionibus. E. gr. ſit propoſita aequatio $v^3 * - 7v - 6 = 0$, quae cum pertineat ad Caſum I. ex §. XXXIII et XXXIV, comparanda erit cum hac $v^3 * - 3Pv - 2Q = 0$. Habetur ergo $P = \frac{7}{3}$; $Q = 3$, eritque 1) $v = [Q + \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} + [Q - \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} = [3 + \sqrt{(3^2 - \frac{7^3}{3^3})}]^{1:3} + [3 - \sqrt{(3^2 - \frac{7^3}{3^3})}]^{1:3} = [3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}]^{1:3} + [3 - \frac{10}{9}\sqrt{-3}]^{1:3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}, + \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}$ (§. XXXVII.) $= + 3$; et hinc 2) $v = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}) + \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}) = -\frac{2}{2} + \frac{4}{6}\sqrt{-3}, -\frac{2}{2} - \frac{4}{6}\sqrt{-3} = -2$; et 3) $v = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}) + (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{-3}, -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{-3} = -1$. Ex quo apparet, eſſe $3 \mp \frac{10}{9}\sqrt{-3} = (\frac{3}{2} \mp \frac{1}{6}\sqrt{-3})^3 = (-\frac{2}{2} \mp \frac{4}{6}\sqrt{-3})^3 = (\frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{-3})^3$: id quod, examine facto, facile comprobatur.

§. 53.

§. 53. Etſi vero in eiusmodi ſingulis tribus radicibus, quales in §. LII. inuentae ſunt, quantitates imaginariae ſe mutuo deſtruant, ita vt in praeſenti exemplo ſit maxima $v = +3$, media $v = -1$, minima $v = -2$, adeoque earum Cubi haud difficulter ita exhiberi poſſint, vt aequationi propoſitae (e. g. huic $v^3 * -7v - 6 = 0$) ſatis fiat; nihilo minus, cum nunc agatur de quantitatum imaginariarum realitate atque aſſignabilitate oſtendenda, res ipſa poſtulare videtur, vt, ſaltem in hoc vnico exemplo, aequationem, retentis quantitatibus imaginariis, conſtruamus. Nimirum

1. Factis quatuor quadratis maioribus α, β, γ, δ Fig. 18. ad idem punctum P coniugatis, abſolute conſiderando, aequalibus, quorum latera ſint $= PI' = 3$, in recta PI' fiat $PE' = \frac{1}{2}PI' = \frac{3}{2}$, et $Pw = \frac{1}{3}PI' = 1$, ductaque $w\lambda$ ad PI' perpendiculari, ſuper diametro PI deſcribatur ſemicirculus $P\lambda I'$: erit chorda $P\lambda = Pa = Pb = \sqrt{3}$, et □tum $Pacb = \sqrt{3} . \sqrt{3} = 3$.

2. Recta Pa in 6 partes aequales ſecta, fiat $P\mu' = \frac{1}{6}Pa = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; item $P\mu'' = \frac{5}{6}Pa = \frac{5}{6}\sqrt{3}$; et $P\mu''' = \frac{4}{6}Pa = \frac{4}{6}\sqrt{3}$.

3. Aſſumto latere $P\mu' = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, fiant quatuor □ta minima α', β', γ', δ', ad P coniugata, abſolute conſiderando, aequalia: erit □tum $\alpha' = \frac{1}{6}\sqrt{3} . \frac{1}{6}\sqrt{3} = \frac{3}{36}$, ſed □tum $\beta' = +\frac{1}{6}\sqrt{3} . -\frac{1}{6}\sqrt{3} = -\frac{3}{36}$ (§. VIII.), et $\sqrt{}$ □ti $\beta' = +\frac{1}{6}\sqrt{-3}$, ſed $\sqrt{}$ □ti $\delta' = -\sqrt{}$ □ti $\beta' = -\frac{1}{6}\sqrt{-3}$ (§ VIII).

Cum itaque ſit I^ma^ $v = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}, + \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}$; erit

 I^ma^ $v =$

$$\mathrm{I}^{mi}v=\left\{\begin{matrix}PE'\\PA'\end{matrix}\right\}+\surd\square ti\beta'+\left\{\begin{matrix}E'I'\\A'K'\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}+\surd\square ti\delta'\\-\surd\square ti\beta'\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}PE'+'EI'\\PA'+'AK'\end{matrix}\right\}=\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}=\left\{\begin{matrix}PI'\\PK'\end{matrix}\right\}=+3,$$

adeoque I^{mi} Cubi baſis $=\square$to$PI'T'K'=\square$to maximo $\alpha=3^2$, et altitudo PL' ſurſum tendens $=PI'=3$, et hinc I^{mus} Cubus $v^3=\alpha.PL'=3^2.3=27$.

4. Aſſumto latere $P\mu''=\frac{5}{6}\surd 3$, fiant quatuor $\square$ta α'', β'', γ'', δ'', ad P coniugata, abſolute conſiderando, aequalia: erit $\square$tum α'', vel $\gamma''=\mp\frac{5}{6}\surd 3.\mp\frac{5}{6}\surd 3=\frac{25\cdot 3}{36}$, ſed $\square$tum β'', vel $\delta''=\frac{5}{6}\surd 3.-\frac{5}{6}\surd 3=-\frac{25\cdot 3}{36}$, et $\surd\square ti\,\beta''=+\frac{5}{6}\surd-3$, ſed $\surd\square ti\,\delta''=-\surd\square ti\,\beta''=-\frac{5}{6}\surd-3$. Proinde facta $PE''=PA''=''EI''=''AK''=\frac{1}{2}Pw=\frac{1}{2}$, cum ſit $PE''=PA''=''EI''=''AK''=-\frac{1}{2}Pw=-\frac{1}{2}$ (§. III.); erit $\mathrm{II}^{da}\,v=-\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\surd-3$, $-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\surd-3$, hoc eſt,

$$=\left\{\begin{matrix}PE''\\PA''\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}+\surd\square ti\delta''\\-\surd\square ti\beta''\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}E''I''\\A''K''\end{matrix}\right\}+\surd\square ti\beta''=\left\{\begin{matrix}PI''\\PK''\end{matrix}\right\}=-\tfrac{3}{2},$$

adeoque II^{di} Cubi baſis $=\square$to$PI''T''K''$, et altitudo Pl'', deorſum tendens $=PI''$, conſequenter II^{dus} Cubus $v^3=\square PI''T''K''.Pl''=(-\frac{2}{2}.-\frac{2}{2}).-\frac{2}{2}=-\frac{8}{8}=-1$.

5. Denique aſſumto latere $P\mu'''=\frac{4}{6}\surd 3$, conſtruantur quatuor quadrata α''', β''', γ''', δ''', ad P coniugata, abſolute conſiderando, aequalia, fiatque $PE'''='''EI'''=PA'''='''AK'''=2PE'''=2.-\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}$; erit $\square$tum α''', vel $\gamma'''=\mp\frac{4}{6}\surd 3.\mp\frac{4}{6}\surd 3=\frac{16\cdot 3}{36}$, ſed $\square$tum β''', vel $\delta'''=\mp\frac{4}{6}\surd 3.\pm\frac{4}{6}\surd 3=-\frac{16\cdot 3}{36}$, et $\surd\square ti\,\beta'''=+\frac{4}{6}\surd-3$,

$\sqrt{-3}$, ſed $\sqrt{\square ti\, \delta'''} = -\sqrt{\square ti\, \beta'''} = -\frac{4}{6}\sqrt{-3}$, adeoque III^{tis} $v = -\frac{2}{2} + \frac{4}{6}\sqrt{-3}$, $-\frac{2}{2} - \frac{4}{6}\sqrt{-3} =$.

$$\left\{\begin{matrix} PE''' \\ PA''' \end{matrix}\right\} + \sqrt{\square ti\beta'''} + \left\{\begin{matrix} E''' I''' \\ A''' K''' \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} +\sqrt{\square ti\delta'''} \\ -\sqrt{\square ti\beta'''} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} PE''' + ''' EI''' \\ PA''' + ''' AK''' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} PI''' \\ PK''' \end{matrix}\right\} = -\frac{4}{2} = -2,$$

adeoque III^{tii} Cubi baſis $= \square to\, PI''' T''' K'''$, et altitudo $P\, l'''$ deorſum tendens $= PI'''$, conſequenter III^{tius} Cubus $v^3 = \square PI''' T''' K''' . Pl''' = (-\frac{4}{2} . -\frac{4}{2}) . -\frac{4}{2} = -\frac{64}{8} = -8$.

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI.

AVCTORE

L. EULERO,

Problema.

Tab. IV Fig. 1. Datis Diametris coniugatis E *e*, F *f* ellipſis tam magnitudine quam poſitione, inuenire axes coniugatos tam magnitudine quam longitudine.

Conſtructio.

Iungatur E F, et ex centro ellipſis C ducatur recta C G ita vt ang: F C G = ang: E C F; tum ducatur F G ita vt ang: C F G = ang: C E F; ſicque triangulum C F G ſimile fiat triangulo C E F. Deinde iuncta *e* G angulus C *e* G biſecetur recta *e* H huicque ex centro C parallela educatur C I, huicque conſtituatur perpendicularis C K, quibus recta per E alteri diametro F *f* parallela acta I E K occurrat in punctis I et K. Ex E porro tam in C I quam C K demittantur perpendicula E L et E M, atque in C I capiatur C A media proportionalis inter C L et C I, itemque in C K capiatur C B media proportionalis inter C M et C K, erunt C A et C B ſemiaxes principales, tam poſitione quam magnitudine, determinati.

Alia

Alia Conſtructio.

Sint C E et C F ſemidiametri coniugatae, ſtatuatur Fig. 2. E D = E C, vt C E D ſit triangulum iſoſceles, et capiantur E G = E H = C F, iungatur C H ipſique parallela ducatur G I rectam E D ſecans in I. Per I agatur C I K = C E, iunctaque E K biſecetur in M, erit recta C M poſitio alterius axis, eique perpendicularis C R poſitio alterius axis coniugati. Ex F demittatur quoque in C M perpendiculum F N, quo producto in L vt ſit N L = F N erunt E K et F L ordinatae ad axem C M, et cum inſuper dentur tangentes in E et F et in L, eſt enim tangens E P parallela C F et tangens L Q parallela C K, hinc vtriusque ſemiaxis quantitas facile determinatur. Erit nempe alter ſemiaxis C A media proportionalis inter C M et C P, et alter C B media proportionalis inter C R et C Q ducta L R ad C Q perpendiculari.

Alia Conſtructio.

Cum diametri coniugatae in centro ſe ad angulos obliquos Fig. 3. interſecent, quorum alter acutus, alter obtuſus, eligantur binae ſemidiametri coniugatae C E, C F angulum acutum E C F conſtituentur, ſtatuaturque vt ante E D = E C, ac fiat E G = E H = C F, tum ductae, C H per G parallela agatur G I: iunctaque C I angulus E C I biſecetur recta C U, quae aequalis capiatur mediae proportionali inter C E et C I, eritque U alter focus: vnde ſimul alter e regione ſitus habebitur: Datis autem focis et puncto in ellipſi axes principales facile aſſignantur.

Demonſtratio

harum Conſtructionum.

Fig. 4. Sit E C F quadrans ellipticus, in quo datae ſunt ſemidiametri coniugatae $CE = e$, $CF = f$, vna cum angulo intercepto $ECF = \theta$. Sit C A alter ſemiaxium principalium cuius tam poſitio quam quantitas quaeritur; Ponatur ergo primum pro eius poſitione inuenienda angulus $ECA = \Phi$, huic angulo aequalis ſtatuatur angulus A C M, vt ſit angulus $ECM = 2\Phi$, et quia puncta E et M ab axe C A aequidiſtant, a centro quoque C aequidiſtabunt, eritque propterea $CM = CE = e$. Ducatur M P ipſi C F parallela, eritque angulus $EPM = ECF = \theta$.

Nunc in triangulo CPM praeter latus $CM = e$ habentur omnes anguli nempe: $EPM = \theta$; $PCM = 2\Phi$; et $CMP = \theta - 2\Phi$; vnde ex Trigonometria erit:

ſin. EPM : CM = ſin. PCM : PM = ſin. CMP : CP
ſeu ſin. θ : e = ſin. 2Φ : PM = ſin. $(\theta - 2\Phi)$: CP

Hinc itaque obtinetur:

$$PM = \frac{e\,\text{ſin.}\,2\Phi}{\text{ſin.}\,\theta} \text{ et } CP = \frac{e\,\text{ſin.}\,(\theta - 2\Phi)}{\text{ſin.}\,\theta}$$

Iam ex natura ellipſis eſt

$$PM^2 = \frac{BF^2}{CE^2}(CE^2 - CP^2) \text{ ſiue}$$

$$CE^2, PM^2 + CF^2, CP^2 = CE^2, CF^2$$

vbi ſi valores pro PM et CP ſubſtituantur, orietur

$$\frac{e^4\,\text{ſin.}\,2\Phi^2}{\text{ſin.}\,\theta^2} + \frac{eeff\,\text{ſin.}\,(\theta - 2\Phi)^2}{\text{ſin.}\,\theta^2} = eeff$$

quae diuiſa per ee et multiplicata per ſin θ^2, abit in

$$ee\,\text{ſin.}\,2\Phi^2 + ff\,\text{ſin.}\,(\theta - 2\Phi)^2 = ff\,\text{ſin.}\,\theta^2.$$

At eſt ſin. $(\theta - 2\Phi) =$ ſin. θ coſ. 2Φ - coſ. θ ſin. 2Φ, ideoque

ſin.

$\text{ſin.}(\theta-2\Phi)^2 = \text{ſin.}\,\theta^2\text{coſ.}2\Phi^2 - 2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi + \text{coſ.}\,\theta^2\text{ſin.}\,2\Phi^2$

Vnde cum ſit $ee\,\text{ſin.}\,2\Phi^2 = ff(\text{ſin.}\,\theta^2 - \text{ſin.}(\theta-2\Phi)^2)$ erit ob $1-\text{coſ.}\,2\Phi^2 = \text{ſin.}\,2\Phi^2$:

$\text{ſin}\,\theta^2 - \text{ſin.}(\theta-2\Phi)^2 = \text{ſin.}\,\theta^2\text{ſin.}\,2\Phi^2 + 2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi - \text{coſ.}\,\theta^2\text{ſin.}\,2\Phi^2$

At eſt $2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta = \text{ſin.}\,2\theta$ et $\text{coſ.}\,\theta^2 - \text{ſin.}\,\theta^2 = \text{coſ.}\,2\theta$, ergo

$\text{ſin.}\,\theta^2 - \text{ſin.}(\theta-2\Phi)^2 = \text{ſin.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi - \text{coſ.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,2\Phi^2$

ſicque erit

$$ee\,\text{ſin.}\,2\Phi^2 = ff\,\text{ſin.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi - ff\,\text{coſ.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,2\Phi^2$$

quae diuiſa per ſin. 2Φ dabit

$$ee\,\text{ſin.}\,2\Phi = ff\,\text{ſin.}\,2\theta\,\text{coſ.}\,2\Phi - ff\,\text{coſ.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,2\Phi$$

ex qua tandem elicitur:

$$\frac{\text{ſin.}\,2\Phi}{\text{coſ.}\,2\Phi} = \text{tang.}\,2\Phi = \frac{ff\,\text{ſin.}\,2\theta}{ee+ff\,\text{coſ.}\,2\theta}$$

Inuento ergo angulo $ECM = 2\Phi$ cuius tangens eſt $= \frac{ff\,\text{ſin.}\,2\theta}{ee+ff\,\text{coſ.}\,2\theta}$; ſi hic angulus biſecetur recta CA, haec iam erit poſitio alterius axis principalis, cuius quantitas ita definitur.

Demiſſo ex E in CA perpendiculo ER, ductaque ad E tangente ET, quae ipſi CF erit parallela, donec ipſi CA productae occurrat in T, ex natura tangentis conſtat fore CA mediam proportionalem inter CR et CT. Iam ob $CE = e$ et $ECA = \Phi$ erit $ER = e\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $CR = e\,\text{coſ.}\,\Phi$. Tum ob ang: $CTE = \theta - \Phi$ erit $ET = \frac{e\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)}$ et $CT = \frac{e\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)}$.

Hinc itaque erit:

ſemiaxis $CA = e\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)}}$.

Alter ſemiaxis ad CA erit normalis, qui ſi intelligatur linea CB repraeſentari, cum ſit

 $RE^2 =$

$RE^2 = \frac{CB^2}{CA^2}(CA^2 - CR^2)$, ex natura ellipſis

erit $CB = \frac{CA.RE}{\sqrt{(CA^2 - CR^2)}}$.

Iam eſt $CA.RE = ee\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)}}$

$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = \sqrt{\left(\frac{ee\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)} - ee\,\text{coſ.}\,\Phi^2\right)}$ ſeu

$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)}}\,(\text{ſin.}\,\theta - \text{ſin.}(\theta-\Phi)\,\text{coſ.}\,\Phi)$

Cum autem ſit $\theta = \theta - \Phi, + \Phi$ erit

$\text{ſin.}\,\theta = \text{ſin.}(\theta-\Phi)\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}(\theta-\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi$; ex quo habebitur

$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{coſ.}(\theta-\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)}}$

Ergo prodibit alter ſemiaxis.

$CB = e\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta}{\text{coſ.}(\theta-\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi}} = e\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}(\theta-\Phi)}}$.

Idem hic calculus locum habebit, ſi figura ad alteram ſemidiametrum datam $CF = f$ accommodetur, tum autem quantitates e et f atque anguli Φ et $\theta - \Phi$ inter ſe permutari debent; vnde denuo orietur.

$CA = f\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}(\theta-\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}}$ et $CB = f\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}(\theta-\Phi)}{\text{coſ.}\,\Phi}}$

ſi ergo axes coniugatos quaeſitos ponamus

alterum $CA = a$, alterum $CB = b$ erit

$a = e\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}(\theta-\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}}$

$b = e\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}(\theta-\Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}(\theta-\Phi)}{\text{coſ.}\,\Phi}}$.

Hinc erit primo $ab = ef\,\text{ſin.}\,\theta$, qua aequatione continetur aequalitas parallelogrammorum circa diametros coniugatas deſcriptorum:

Deinde hinc etiam denuo angulum Φ determinare poterimus; erit enim

$\frac{ee\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}(\theta-\Phi)} = \frac{ff\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}(\theta-\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}$

ſeu $ee\,\text{ſin.}\,2\Phi = ff\,\text{ſin.}\,2(\theta-\Phi) = ff\,\text{ſin.}\,2\theta\,\text{coſ.}\,2\Phi - ff\,\text{coſ.}\,2\theta\,\text{ſin}\,2\Phi$

vnde

vnde fit vt ante:

$\frac{\text{ſin. } 2\Phi}{\text{coſ. } 2\Phi} = \text{tang. } 2\Phi = \frac{ff\,\text{ſin. } 2\theta}{ee + ff\,\text{coſ. } 2\theta}.$

Ex quatuor ſuperioribus formulis quoque obtinemus:

$\frac{\text{ſin.}(\theta - \Phi)}{\text{coſ. } \Phi} = \frac{ee\,\text{ſin. } \theta}{aa} = \frac{bb}{ff\,\text{ſin. } \theta} = A$

$\frac{\text{coſ.}(\theta - \Phi)}{\text{ſin. } \Phi} = \frac{aa}{ff\,\text{ſin. } \theta} = \frac{ee\,\text{ſin. } \theta}{bb} = B$

vnde fit

$\text{ſin. } \theta - \frac{\text{coſ. } \theta\,\text{ſin. } \Phi}{\text{coſ. } \Phi} = A$ et $\frac{\text{coſ. } \theta\,\text{coſ. } \Phi}{\text{ſin. } \Phi} + \text{ſin. } \theta = B$

ergo $\frac{\text{coſ. } \theta\,\text{ſin. } \Phi}{\text{coſ. } \Phi} = \text{ſin. } \theta - A$ et $\frac{\text{coſ. } \theta\,\text{coſ. } \Phi}{\text{ſin. } \theta} = B - \text{ſin. } \theta$

quae aequationes inuicem multiplicatae praebent:

$\text{coſ. } \theta^2 = (A+B)\,\text{ſin. } \theta - AB - \text{ſin. } \theta^2$ ſeu $1 + AB = (A+B)\,\text{ſin. } \theta$.

Cum iam A et B geminos habeant valores, erit

$AB = \frac{ee}{ff}$ et $(A+B)\,\text{ſin. } \theta = \frac{bb}{ff} + \frac{aa}{ff}$

vnde fit $1 + \frac{ee}{ff} = \frac{aa+bb}{ff}$, ideoque hinc iſta nota ellipſeos proprietas reſultat: $aa + bb = ee + ff$.

Porro ſi alterum focum ponamus in U, erit vti conſtat

$CU = \sqrt{(aa-bb)} = \sqrt[4]{(aa-bb)^2}$

at $(aa-bb)^2 = (aa+bb)^2 - 4aabb$.

Cum igitur ſit $aa + bb = ee + ff$ et $ab = ef\,\text{ſin. } \theta$ erit

$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff(1 - 2\,\text{ſin. } \theta^2)}$

verum eſt $1 - 2\,\text{ſin. } \theta^2 = \text{coſ. } 2\theta$, hincque obtinetur:

$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 - 2eeff.\,\text{coſ. } 2\theta)}$

His inuentis ratio conſtructionum datarum fiet perſpicua:

Pro I. *Conſtructione.* Ob $ECF = FCG = \theta$ erit ECG Fig. 1.
2θ; et cum ſit $EC(e) : CF(f) = CF(f) : CG$ erit $CG = \frac{ff}{e}$; Porro ducta eG erit tang. $CeG = \frac{CG\,\text{ſin. } eCG}{Ce - CG\,\text{coſ. } eCG}$

 At

At Ce = e; ſin. eCG = ſin. 2θ et coſ. eCG = − coſ. 2θ, vnde fit tang. CeG = $\frac{ff\,\text{ſin.}\,2\theta}{ee+ff\,\text{coſ.}\,2\theta}$ quae eſt expreſſio ante pro tang. 2Φ inuenta. Erit ergo CeG = 2Φ, anguloque CeG biſecto per eH erit angulus CeH eique aequalis ECI = Φ. Vnde recta CI erit poſitio alterius axis, eique normalis CK dabit poſitionem alterius. Deinde recta IEK per E ipſi CF parallela ducta eſt tangens ellipſis in E, quare ſi ex E in vtrumque axem perpendicula EL, EM demittantur, ſemiaxis CA erit media proportionalis inter CL et CI, itemque ſemiaxis CB media proportionalis inter CM et CK, plane vti conſtructio habet.

Fig. 2. *Pro II. Conſtructione.* Ob triangulum CED iſosceles et angulum ECD = EDC = θ erit ang: CED = $180^\circ - 2\theta$. Deinde ob EC = e, EG = EH = CF = f, quia GI ipſi CH eſt parallela, erit EI = $\frac{ff}{e}$. Porro eſt tangens ECI = $\frac{\text{EI ſin. CED}}{\text{CE} - \text{EI coſ. CED}}$ ergo ob ſin. CED = ſin. 2θ et coſ. CED = − coſ. 2θ habebitur tangens ECI = $\frac{ff\,\text{ſin.}\,2\theta}{ee+ff\,\text{coſ.}\,2\theta}$, eritque ergo ECI = 2Φ; vnde ſumta CK = CE = e, biſectaque EK in M, recta CM angulum ECK = 2Φ biſecabit, ita vt ſit ECM = Φ, ideoque CMAP poſitio alterius axis, cuius ſemiſſis quantitas CA vt ante definitur, et determinatio alterius ſemiaxis CB ex ipſa conſtructione eſt manifeſta.

Fig. 3 *Pro III. Conſtructione.* Ex ratione praecedentis conſtructionis intelligitur rectam CU angulum ECI biſecantem dare poſitionem axis transuerſi. Cum igitur ſit CE = e, EI = $\frac{ff}{e}$ et CEI = $180^\circ - 2\theta$ et erit CI = $\sqrt{(\text{CE}^2 + \text{EI}^2 - 2\,\text{CE}.\text{EI coſ. CEI})} = \sqrt{(ee + \frac{f^4}{ee} + 2ff\,\text{coſ.}\,2\theta)}$ $= \frac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff\,\text{coſ.}\,2\theta)}$.

Hinc

Hinc cum ſit CU media proportionalis inter CE et CI erit $CU = \sqrt{e \cdot \frac{1}{e}} \sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \text{coſ.} 2\theta)}$

ſeu $CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff \text{coſ.} 2\theta)}$.

Ex qua expreſſione manifeſtum eſt fore U alterum ellipſeos focum, vnde ſimul alter focus innoteſcit. Hic tantum certum eſſe oportet, rectam CU eſſe poſitionem axis transuerſi non vero coniugati; ſed in hoc error facile euitatur, ſi perpendamus, axem transuerſum ſemper intra angulum acutum, quem diametri coniugatae conſtituunt, cadere.

Verum vt hae conſtructiones faciles videntur, tamen fateri cogor, conſtructionem, quam *Pappus Alexandrinus* ſine demonſtratione quidem exhibuit, his palmam longe praeripere. Quoniam vero demonſtrationem non addidit, eamque *Commentator eius Commendinus* non ſatis feliciter ſupplere conatus eſt, hic non ſolum conſtructionem *Pappi*, ſed etiam eius rationem coronidis loco ſubiungam.

Sint igitur CE et CF ſemidiametri ellipſis datae, Fig. 5. ac per F agatur ipſi CE parallela indefinita, quae ellipſin in F tanget. Cadant axes principales in rectas CG et CH, atque perſpicuum eſt, ſi puncta G et H eſſent cognita, poſitionem axium principalium inde determinari. Totum negotium ergo huc redit, vt puncta G et H definiantur. Concipiamus per haec puncta quaeſita G et H, atque ellipſis centrum C tranſire, et quoniam angulus GCH rectus eſt iam nouimus huius circuli centrum alicubi in recta GH exiſtere. Praeterea vero ex natura tangentium ellipſis nouimus, quoniam CE et ſemidiameter

ter coniugata ad C F, tangensque in F ab axibus principalibus in G et H ſecatur, eſſe rectangulum F G, F H aequale quadrato ipſius C E. Duas ergo habemus conditiones, quibus circulus quaeſitus per C et ambo deſiderata tangentis puncta G et H tranſiturus determinatur: altera vt quod eius centrum in ipſa hac recta G H ſitum eſſe debet, altera vero quod rectangulum F G, F H quadrato ipſius C E aequale eſſe debet. Tranſeat iſte circulus etiam nunc incognitus per rectae C F productae punctum K. et quia erit C F . F K = F G . F H, erit quoque C F . F K = C E², ideoque F K tertia proportionalis ad C F et C E quarum cum vtraque ſit data, innoteſcet punctum K et circulus quaeſitus tranſire debet per puncta C et K, ita vt eius centrum in rectam G H cadat. Biſecta ergo C K in L, eique in L iuncta normali L I rectam G H in I ſecante erit I centrum circuli quaeſiti, ex quo circulus radio I C vel I K deſcriptus rectam G H in punctis quaeſitis ſecabit; quae eſt *Pappi* conſtructio.

Sequens autem conſtructio ſimplicior videtur quam hactenus allatae, quoniam non ſolum axium principalium poſitionem ſed etiam quantitatem ſponte exhibet, atque omnes operationes, quibus opus eſt, iam in ſe complectitur, ita vt ne mediae quidem proportionalis ſumtione indigeamus.

Noua Conſtructio.

Problematis propoſiti.

Fig. 6. Sint C E, C F ſemidiametri coniugatae propoſitae ad angulum acutum E C F inclinatae, ad quas compleatur paralle-

parallelogrammum CEDF. Tum producatur EC in e, vt ſit $Ce = CE$, et ad CF normaliter iungatur $CG = CF$. Iunctis EG et eG producatur EG in H, vt ſit $GH = Ge$, et ducta eH biſecetur in I; atque in recta CI capiatur $KL = KI$. Deinde ex centro C circini apertura CI deſcribatur arcus MN rectas FD et ED ſecans in M et N, atque ad has rectas ex punctis iſtis perpendiculares conſtituantur MO et NO ſe mutuo in O ſecantes, per quod punctum O ex centro C vsque ad arcum MN ducatur recta COA, erit haec ſemiaxis transuerſus, in eoque punctum O alter ellipſeos focus. Denique ad CA normaliter ſtatuatur $CB = CL$, eritque CB ſemiaxis coniugatus.

Demonſtratio.

Ponantur ſemidiametri coniugatae $CE = e$ et $CF = f$ angulus vero $ECF = \theta$; erit ex conſtructione $Ce = e$, $CG = f$, et angulus $GCe = 90^\circ - \theta$, ideoque coſ. GCe $=$ ſin. θ. Porro vocetur ſemiaxis transuerſus $CA = a$, et ſemiaxis coniugatus $CB = b$; erit per ſupra inuenta $aa + bb = ee + ff$ et $abef$ ſin. θ. Hinc fiet:

$aa + 2ab + bb = ee + ff + 2ef\,\text{ſin.}\,\theta$ et $aa - 2ab + bb = ee + ff - 2ef\,\text{ſin.}\,\theta$

ergo $a + b = \surd(ee + ff + 2ef\,\text{ſin.}\,\theta)$ et $a - b = \surd(ee + ff - 2ef\,\text{ſin}\,\theta)$

At ex triangulo ECG ab $CE = e$, $CG = f$ et coſ. $GCe =$ ſin. θ reperitur $EG = \surd(ee + ff + 2ef\,\text{ſin.}\,\theta)$, ex triangulo vero eCG, vbi eſt $Ce = e$, $CG = f$ et coſ. $GCe =$ ſin. θ, fit $Ge = \surd(ee + ff - 2ef\,\text{ſin.}\,\theta)$. Hanc ob rem habebitur:

$$a + b = EG \text{ et } a - b = eG$$

ideoque $2a = EG + eG$ et $2b = EG - eG$.

 Cum

Cum iam ſit GH $=eG$, erit $2a=$EH, ac biſecta eH in I, ob C rectae Ee punctum medium, erit CI parallela ipſi E H eiusque ſemiſſis, vnde $a=$ C I; et quia I K $=\frac{1}{2}$G H $=\frac{1}{2}$Ge, et K L $=$ I K, erit C L $=$ C I $-$ 2 I K $=$ CI $-$ GH $= a -$ Ge, ideoque CL $=b$. Aequatur ergo CI ſemiaxi tranſuerſo et CL ſemiaxi coniugato. His inuentis praeterea ex natura ellipſis conſtat, quia E D et F D ſunt ellipſis tangentes, ſi ex altero foco O in has tangentes perpendicula demittantur O N et O M, punctorum M et N a centro C diſtantias ſemiaxi tranſuerſo aequari. Viciſſim ergo ſi puncta M et N ita accipiantur, vt eorum diſtantia a centro C aequalis ſit ſemiaxi tranſuerſo C I, quemadmodum ea quoque in conſtructione ſunt ſumta, atque ex his punctis ad tangentes perpendicula ducantur MO et NO, haec perpendicula ſe inuicem in foco O eſſe interſectura. Reperitur ergo hoc modo alter focus O, qui cum in axe tranſuerſo ſit ſitus, erit recta CA per O ducta ad arcum MN non ſolum axi tranſuerſo aequalis, ſed etiam veram eius poſitionem tenet. Cum igitur ſit CA ſemiaxis tranſuerſus, ſi ad eum normaliter ſtatuatur C B $=$ C L, erit quoque C B ſemiaxis coniugatus.

DE

DE PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM AB EORVM FIGVRA NON SPHAERICA ORIVNDA.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Quamuis cum *Neutono* aſſumamus dari in ſyſtemate planetario eiusmodi centrum virium, ad quod cuncta materiae, ex qua planetae conſtant, elementa attrahantur in ratione reciproca duplicata diſtantiarum; hinc tamen non ſequitur, ſingulos planetas circa iſtud centrum perfectas deſcripturos eſſe ellipſes, quarum atteruter focus in hoc centro eſſet ſitus. Haec enim concluſio, vti ex ipſius *Neutoni* demonſtrationibus facile colligitur, locum non habet, niſi corpora planetarum vel ſint tam parua, vt inſtar punctorum ſpectari queant, vel ita comparata, vt omnium virium, quibus ſingulae planetae particulae vrgentur, media directio per ipſius centrum grauitatis ſimul et centrum virium tranſeat, atque inſuper vis aequiualens ipſa, quae ex ſingulis illis viribus conflatur, ſit diſtantiarum quadratis reciproce proportionalis.

§. 2. Egregie vero etiam *Neutonus* demonſtrauit, ſi corpus planetae ſit perfecte ſphaericum atque ex materia homogenea conſtet, tum omnium virium, quibus ſingulae eius particulae ad centrum virium nitantur, mediam directionem non ſolum per ipſum planetae centrum ad centrum virium porrigi, ſed etiam vim ex omnium con-

iunctione natam reciproce proportionalem eſſe quadrato diſtantiae centri planetae a centro virium. Hoc igitur caſu planeta perinde circa centrum virium mouebitur, ac ſi cuncta eius materia in ipſius centro eſſet vnita, ideoque eius motus perficietur in ſectione conica, cuius alteruter focus in centro virium exiſtat.

§. 3. Quae proprietas, cum tam commode in figuram ſphaericam materia vniformiter repletam competat, atque ob hanc cauſam non adeo multis aliis figuris ſit communis, nullum eſt dubium, quin planeta, qui alia figura diuerſa fuerit praeditus, non eandem legem in motu ſuo ſit ſecuturus. Niſi enim eius corpus hoc modo expoſito ſit formatum, omnino euenire poteſt, vt media omnium virium directio vel non per centrum grauitatis planetae tranſeat, vel non per centrum virium, vel etiam per neutrum. Tum vero etiam ſaepiſſime accidit, vt vis omnibus ſimul ſumtis aequiualens non ſit quadratis diſtantiae a centro virium reciproce proportionalis, quarum anomaliarum ſi vel vna affuerit, motus planetae ab ellipſi ſeu ſectione conica diſcrepare debebit.

§. 4. Cuiusmodi autem motus perturbatio a defectu idoneae Planetae formae oriri debeat, difficillimum profecto erit generatim determinare, cum fines analyſeos nondum ſint eousque promoti, vt aequationes, quas leges Mechanicae ſuppeditant, euoluere atque ad vſum accommodare liceret. Neque huiusmodi inueſtigatio cum vlla ſucceſſus ſpe ſuſcipi poteſt, niſi cum conſtet, illam perturbationem motus tam eſſe exiguam, vt in calculo inſtar quantitatis propemodum euaneſcentis tractari queat. Cum vero et haec tractatio, ob infinitam figurarum, quae plane-

planetis tribui queant, varietatem nimis late pateat, hic ſingularem tantum caſum euoluere conſtitui, ex quo tamen via ad innumeros alios tractandos cognoſci poſſit.

§. 5. Conſiderabo ergo corpus ex duobus globis A et B virga rigida et inertiae experte iunctis compoſitum, quod in plano tabula repraeſentato moueatur circa centrum virium O, ad quod vterque globus ſeorſim ſollicitetur in ratione duplicata reciproca diſtantiarum. Ad motum ergo huius corporis AB hinc oriundum recte inueſtigandum ad eius centrum grauitatis, quod ſit in C reſpici oportet. Repraeſentent ergo litterae A et B maſſas globorum A et B, ſintque diſtantiae $AC = a$, $BC = b$, ab horum globorum centris aeſtimandae, erit ex natura centri grauitatis $Aa = Bb$. Porro vis centri virium O tanta ſit vt in diſtantia f, aequetur grauitati, atque globus A verſus O vrgebitur vi motrice $= \frac{Aff}{OA^2}$, et globus B eodem trahetur ſecundum directionem BO vi $= \frac{Bff}{OB^2}$. Tab. V. Fig. 1.

§. 6. Sumta quadam recta OE pro axe ad quem motus referatur, ſit EC linea curua, quam centrum grauitatis C iam deſcripſerit, ac vocetur diſtantia $OC = z$, et angulus $EOC = \phi$, erit demiſſo ex C in axem perpendiculo CP, abſciſſa $OP = x = z$ coſ. ϕ et applicata $PC = y = z$ ſin. ϕ, poſito ſinitoto $= 1$. Hoc autem temporis puncto virga AB eum ſitum teneat, quem figura refert ſitque angulus $OCA = \theta$, quem motus continuatione augeri ponam, ita vt corpus A circa C reſpectu lineae OC arcum DA iam deſcripſerit. At quia haec ipſa linea OC eſt mobilis, motum iſtum angularem ad lineam quandam fixam OE referri conuenit, producatur ergo recta BCA donec huic OE occurrat in R, eritque

 angulus

angulus ERC menſura vera motus angularis, qui angulus ERC, quem ponam $=\eta$ erit $=\Phi+\theta$, qui pergente motu augebitur, ita vt ſit $y=\Phi+\theta$.

§. 7. Vt iam motus centri grauitatis C determinetur ambae vires, quibus globi A et B ad O ſollicitantur, in centrum grauitatis ſunt transferendae, in quo ſimul vtriusque maſſa collecta concipi debet, quae eſt $=A+B$, ſollicitabitur igitur primo punctum C in directione ipſi AO parallela vi motrice $=\frac{Aff}{AO^2}$, vnde naſcitur vis in directione $CO=\frac{Aff.OC}{AO^3}$ et vis in directione $CB=\frac{Aff.AC}{AO^3}$. Simili modo ob attractionem globi B, centrum grauitatis C ſollicitabitur ſecundum directionem ipſi BO parallelam vi $=\frac{Bff}{BO^2}$, vnde oritur vis in directione $CO=\frac{Bff.OC}{BO^3}$ et vis in directione $CA=\frac{Bff.BC}{BO^3}$. His collectis centrum grauitatis C primo vrgebitur ſecundum directionem CO vi motrice $=ff.OC(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3})=ffz(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3})$; deinde vero vi ſecundum directionem $CA=ff(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3})$ $=Aaff(\frac{1}{BO^3}-\frac{1}{AO^3})$ ob $Bb=Aa$.

§. 8. Has autem vires ad directiones conſtantes, axi OE tum parallelas tum normales reuocari oportet: atque ex vi $ffz(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3})$ in directione CO ſollicitante reſultabit ob angulum $EOC=\Phi$;

in directione CP vis $=ffz\sin\Phi(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3})$

in directione Co vis $=ffz\cos.\Phi(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3})$

Porro ex vi $ff(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3})$ ſecundum CA vel CR vrgente ob angulum $ERC=\eta=\Phi+\theta$ proueniet

in directione CP vis $=ff\sin.\eta(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3})$

in directione Co vis $=ff\cos.\eta(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3})$

ſicque

ſicque coniunctim habebitur

Vis motrix $CP = \frac{Bff}{BO^3}(b\,\text{ſin.}\,\eta + z\,\text{ſin.}\,\Phi) + \frac{Aff}{AO^3}(z\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,\text{ſin.}\,\eta)$

Vis motrix $Co = \frac{Bff}{BO^3}(z\,\text{coſ.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\eta) + \frac{Aff}{AO^3}(z\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\text{coſ.}\,\eta)$

§. 9. Maſſa autem ſeu inertia in C mouenda eſt $=$ $A + B$, per quam vtraque vis motrix diuiſa dabit vim acceleratricem ſecundum eandem directionem. Ponamus breuitatis gratia vim acceleratricem ſecundum directionem abſciſſae parallelam $Co = \Phi$, et vim acceleratricem ſecundum directionem applicatae $CP = Q$ erit

$$P = \frac{Aff(z\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\text{coſ.}\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z\,\text{coſ.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

$$Q = \frac{Aff(z\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,\text{ſin.}\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z\,\text{ſin.}\,\Phi + b\,\text{ſin.}\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

quarum vtraque tendit ad diminutionem coordinatarum x et y.

§. 10. Si igitur elementum temporis exponatur per dt, idque in progreſſu ad differentialia ſecunda conſtans ponatur, erit ſecundum leges motus acceleratio in directione abſciſſae $= \frac{2ddx}{dt^2}$, et acceleratio in directione applicatae $= \frac{2ddy}{dt^2}$; quibus formulis propterea illae vires acceleratrices P et Q negatiue ſumtae aequales ſunt ponendae; vnde prodibunt iſtae aequationes

I. $\frac{2ddx}{dt^2} = -P$ et II. $\frac{2ddy}{dt^2} = -Q.$

Cum autem ſit $x = z\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y = z\,\text{ſin.}\,\Phi$ erit

$dx = dz\,\text{coſ.}\,\Phi - zd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$; $dy = dz\,\text{ſin.}\,\Phi + zd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ atque

I. $ddx = ddz\,\text{coſ.}\,\Phi - 2dz\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi - z\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = -\frac{Pdt^2}{2}$

II. $ddy = ddz\,\text{ſin.}\,\Phi + 2dz\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi + z\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = -\frac{Qdt^2}{2}$

§. 11.

§. 11. Vt iſtae aequationes ad vſum propius accommodentur, multiplicetur prima per coſ. Φ, altera per ſin. Φ, erit ob $\operatorname{coſ.} \Phi^2 + \operatorname{ſin.} \Phi^2 = 1$ eas addendo.

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2(P \operatorname{coſ} \Phi + \operatorname{ſin.} \Phi)$$

Deinde prior multiplicetur per − ſin. Φ, et altera per coſ. Φ, erit eas pariter addendo

$$2dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = -\tfrac{1}{2}dt^2(Q \operatorname{coſ.} \Phi - P \operatorname{ſin.} \Phi)$$

Supereſt igitur vt pro P et Q valores ante exhibiti ſubſtituantur.

§. 12. Erit autem hos valores ex §. IX. reſtituendo

$$Q \operatorname{ſin.} \Phi + P \operatorname{coſ.} \Phi = \frac{Aff(z - a \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{ſin.} \eta - a \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{coſ.} \eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{ſin.} \eta + b \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{coſ.} \eta)}{(A+B)BO^3}$$

ſimilique modo

$$Q \operatorname{coſ.} \Phi - P \operatorname{ſin.} \Phi = \frac{Aff(a \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{coſ.} \eta - a \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{ſin.} \eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(b \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{ſin.} \eta - b \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{coſ.} \eta)}{(A+B)BO^3}$$

At eſt $\operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{ſin.} \eta + \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{coſ.} \eta = \operatorname{coſ.}(\eta - \Phi) = \operatorname{coſ.} \theta$, ob $\eta = \Phi + \theta$, tum vero $\operatorname{ſin} \Phi \operatorname{coſ.} \eta - \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{ſin.} \eta = \operatorname{ſin.}(\Phi - \eta) = -\operatorname{ſin.} \theta$, ſicque angulo η ex computo exeunte, habebitur.

$$Q \operatorname{ſin} \Phi + P \operatorname{coſ.} \Phi = \frac{Aff(z - a \operatorname{coſ.} \theta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b \operatorname{coſ.} \theta)}{(A+B)BO^3} \text{ et}$$

$$Q \operatorname{coſ.} \Phi - P \operatorname{ſin.} \Phi = \frac{-Aaff \operatorname{ſin.} \theta}{(A+B)AO^3} + \frac{Bbff \operatorname{ſin.} \theta}{(A+B)BO^3}$$

§. 13. Quodſi iam iſti valores in ſuperioribus aequationibus (§. XI.) ſubſtituantur, orientur ſequentes duae aequationes, quibus motus centri grauitatis C continetur.

$$\text{I. } ddz - z^d\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z - a\,\text{coſ.}\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b\,\text{coſ.}\,\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2^dz^d\Phi + z^{dd}\Phi = \frac{ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{Aa\,\text{ſin.}\,\theta}{AO^3} - \frac{Bb\,\text{ſin.}\,\theta}{BO^3}\right)$$

quae adhuc in ſe continent quatuor indeterminatas z, Φ, θ et t; vnde vna praeterea opus eſt aequatione, vt binae eliminari et aequatio inter duas tantum indeterminatas elici queat.

§. 14. Verum hanc tertiam aequationem nobis ſuppeditabit conſideratio motus rotatorii virgea A B, quae cum axe Q E iam conſtituit angulum $ERC = \eta = \Phi + \theta$, progreſſu temporis augendum. Ad huius accelerationem definiendam noſſe oportet totius corporis gyrantis momentum inertiae, quod oritur, ſi ſingulae eius particulae per quadrata diſtantiarum ſecarum ab axe gyrationis multiplicentur, haecque producta in vnam ſummam colligantur. Sit igitur hoc momentum inertiae $=(A+B)kk$. Deinde ſi momentum virium hunc motum gyratorium accelerantium, ſeu ad angulum η augendum tendentium ponatur $= Rr$, erit tempuſculo dt acceleratio motus rotatorii $\frac{2dd\eta}{dt^2} = \frac{Rr}{(A+B)kk}$ ſeu $ddy = \frac{Rrdt^2}{2(A+B)kk}$.

§. 15. Cum autem globus A ad O ſollicitetur vi $= \frac{Aff}{AO^2}$, erit eius momentum reſpectu axis rotationis C $= \frac{Aff}{AO^2} \cdot AC\ \text{ſin.}\ OAR$; at eſt ſin. O A R : O C = ſin. O C A : A O, ideoque $\text{ſin.}\ OAR = \frac{OC\,\text{ſin.}\,OCA}{AO} = \frac{z\,\text{ſin.}\,\theta}{AO}$ ergo hoc momentum erit $= \frac{Aaffz\,\text{ſin.}\,\theta}{AO^3}$, et ad anguli η diminutionem tendit. Globus autem B ad O trahitur vi $= \frac{Bff}{BO^2}$, eiusque ergo momentum ad C erit $= \frac{Bff}{BO^2}$ B C ſin. $OBC = \frac{Bbffz\,\text{ſin.}\,\theta}{BO^3}$, et ad angulum η augendum

 impen-

impenditur, vnde totale momentum, quod poſui R r, erit $= ff\, z$ ſin. $\theta\, (\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3})$ hincque acceleratio motus rotatorii ita difinietur, vt ſit: $dd\eta = \frac{ffz\, dt^2 \text{ſin.}\theta}{2(A+B)kk} (\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3}) = dd\Phi + dd\theta$.

§. 16. En igitur tres aequationes, quibus opus eſt ad motum tam centri grauitatis C, quam motum gyratorium ipſius virgae A B determinandum:

I. $ddz - z\,d\Phi^2 = \frac{-ff\,dt^2}{2(A+B)} (\frac{A(z - a\,\text{coſ.}\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b\,\text{coſ.}\,\theta)}{BO^3})$

II. $2\,dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = \frac{ff\,dt^2}{2(A+B)} (\frac{Aa\,\text{ſin.}\,\theta}{AO^3} - \frac{Bb\,\text{ſin.}\,\theta}{BO^3})$

III. $dd\Phi + dd\theta = \frac{-ffz\,dt^2}{2(A+B)kk} (\frac{Aa\,\text{ſin.}\,\theta}{AO^3} - \frac{Bb\,\text{ſin.}\,\theta}{BO^3})$

Tota ergo huius duplicis motus determinatio huc eſt reducta, vt ex iſtis tribus aequationibus duae indeterminatae eliminentur, et aequatio inter duas tantum variabiles eliciatur, cuius reſolutio ad vſum vocari queat.

§. 17. Diuidatur aequatio II per III, ac prodibit ſequens formula perquam concinna.

$$\frac{2dz\,d\Phi + z\,dd\Phi}{dd\Phi + dd\theta} = -\frac{kk}{z}.$$

ſeu $2z\,dz\,d\Phi + zz\,dd\Phi + kk\,dd\eta = 0$ ob $\eta = \Phi + \theta$.

Integratione ergo inſtituta erit:

$zz\,d\Phi + kk\,d\eta = C\,dt$ denotante B quantitatem conſtantem. Exprimit autem $\frac{1}{2} zz\,d\Phi$ elementum areae E O C, quae ſi dicatur $= S$, erit $2\,dS + kk\,d\eta = C\,dt$, et quia celeritas gyratoria exponitur per $\frac{d\eta}{dt}$, erit $\frac{d\eta}{dt} = \frac{C}{kk} - \frac{2dS}{kk\,dt}$, et denuo integrando: $\eta = D + \frac{Ct}{kk} - \frac{2S}{kk}$.

§. 18. Hinc primo patet, ſi area EOC a centro grauitatis C circa centrum virium O deſcripta exacte

eſſet

eſſet tempori proportionalis, tum etiam motum gyratorium eiusue celeritatem $\frac{d\eta}{dt}$ futuram eſſe vniformem. Sin autem areae EOC deſcriptio non ſit tempori proportionalis, quod re vera euenire mox oſtendetur, tum etiam motus gyratorius virgae AB circa centrum C tantundem ab vniformitate diſcrepabit. Atque hinc ſine dubio circa motum lunae libratorium, quia deſcriptio arearum circa terram non eſt tempori proportionalis, praeclara concludere licebit, etiamſi caſus, quem hic contemplor, non admodum congruat cum figura lunae. Sed hanc applicationem tam diu differre conueniet, donec reliqua motus phaenomena fuerint euoluta.

§. 19. Cum igitur iam adepti ſimus hanc aequationem $zzd\Phi + kkd\eta = Cdt$: ob $d\eta = d\Phi + d\theta$, hinc eliminare poterimus elementum quantitatis variabilis θ, ope formulae

$$d\theta = \frac{Cdt - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$$

ideoque duae tantum nobis ſupererunt aequationes euoluendae, nempe:

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z - a\cos.\theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b\cos.\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{ffdt^2\sin.\theta}{2(A+B)}\left(\frac{Aa}{AO^3} - \frac{Bb}{BO^3}\right)$$

in quibus etſi angulus θ adhuc ineſt, tamen ſufficit noſſe eius differentialis valorem:

$$d\theta = \frac{Cdt - zzd\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 20. Loco elementi temporis dt introducamus in calculum motum corporis ſphaerici circa centrum virium O in circulo cuius radius ſit $= hu$, informiter reuoluentis; quod tempuſculo dt angulum circa O deſcribat $= d\omega$,

qui propterea ipſi dt erit proportionalis, eiusque loco in calculum induci poterit. Relatio autem inter $d\omega$ et d elicietur ex aequatione prima ponendo, $z = b$; $d\Phi = d\omega$, $a = b = 0$ et $AO = BO = b$; quo facto erit $-bd\omega = \frac{-ffdt^2}{2bb}$, ita vt ſit $\frac{dt^2}{2} = \frac{b^3\,d\omega}{ff}$ vnde aquationes noſtrae erunt:

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = \frac{\pm b^3 d\omega^2}{A+B}\left(\frac{A(z-a\,\text{coſ.}\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\,\text{coſ.}\,\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{k^3 d\omega^2\,\text{ſin.}\,\theta}{A+B}\left(\frac{Aa}{AO^3} - \frac{Bb}{BO^3}\right)$$

et mutata conſtante C erit $d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$.

§. 21. Antequam autem hinc quicquam concludere valeamus, valores analyticos pro diſtantiis AO et BO in calculum inducere oportet. Quia eſt autem $CO = z$; $CA = a$; $CB = b$ et ang: $OCR = \theta$, erit ex regulis Trigonometriae.

$$AO = \sqrt{(aa + zz - 2az\,\text{coſ.}\,\theta)}$$

$$\text{et } BO = \sqrt{(bb + zz + 2bz\,\text{coſ.}\,\theta)}.$$

Neque vero hinc in genere quicquam, quod in vſum conuerti poſſet, concludere licet, niſi diſtantias a et b prae diſtantia $CO = z$ ponamus minimas, qui etiam caſus ad vſum Aſtronomiae maxime videtur accommodatus.

§. 22. Sint igitur diſtantiae $AC = a$ et $BC = b$ prae $CO = z$ quam minimae, ac per regulam approximationum erit:

$$\frac{1}{AO^3} = (zz - 2az\,\text{coſ.}\,\theta + aa)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} + \frac{3a\,\text{coſ.}\,\theta}{z^4} - \frac{3aa(1 - 5\,\text{coſ.}\,\theta^2)}{2z^5}$$

$$\frac{1}{BO^3}(zz + 2bz\,\text{coſ.}\,\theta + bb)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} - \frac{3b\,\text{coſ.}\,\theta}{z^4} - \frac{3bb(1 - 5\,\text{coſ.}\,\theta^2)}{2z^5}$$

Hinc igitur fiet:

$$\frac{z-a\cos\theta}{AO^3} = \frac{1}{zz} + \frac{2a\cos\theta}{z^3} - \frac{3aa(1-3\cos\theta^2)}{2z^4}$$

$$\frac{z+b\cos\theta}{BO^3} = \frac{1}{zz} - \frac{2b\cos\theta}{z^3} - \frac{3bb(1-3\cos\theta^2)}{2z^4}$$

Atque aequationes reſoluendae erunt

$$\text{I. } ddz-zd\Phi^2 = -b^3 d\omega^2\left(\frac{1}{zz} + \frac{2(Aa-Bb)\cos\theta}{(A+B)z^3} - \frac{3(Aaa+Bbb)(1-3\cos\theta^2)}{2(A+B)z^4}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = b^3 d\omega^2 \sin\theta\left(\frac{Aa-Bb}{(A+B)z^3} + \frac{3(Aaa+Bbb)\cos\theta}{(A+B)z^4}\right)$$

quibuscum coniungenda eſt formula:

$$d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 23. Eſt autem ex natura centri grauitatis $Aa = Bb$, vnde erit $Aaa + Bbb = Bab + Aab$, ideoque $\frac{Aaa+Bbb}{A+B} = ab$, quo notato binae noſtrae aequationes induent has formas,

$$\text{I. } ddz = z^d\Phi^2 = \frac{-b^3 d\omega^2}{zz} + \frac{3abb^3 d\omega^2(1-3\cos\theta^2)}{2z^4}$$

$$\text{II. } 2dz^d\Phi + z^{dd}\Phi = \frac{3abb^3 d\omega^2 \sin\theta \cos\theta}{z^4}$$

exiſtente $d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$

Ad has reſoluendas notari conuenit, quod ſi eſſet $ab = 0$, motum in ellipſi ſecundum regulas *Kepleri* abſolutum iri, foreque talem, vt ſi diſtantia media ponatur $= b$: excentricitas $= n$, et anomalia excentrica $= v$, futurum ſit:

$z = b(1 + n\cos v)$; $d\omega = dv(1 + n\cos v)$ atque $d\Phi = \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos v}$.

§. 24. Quia autem veri valores aliquantum ab his diſcrepabunt, ponatur:

$$d\omega = \mu dv(1 + n\cos v),$$

$$z = b(1 + n\cos v + p)$$

et cum iam ſatis prope ſit $d\Phi = \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos\Phi}$

 erit

erit $d\theta = \frac{gg\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)}{kk} - \frac{bb\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)\sqrt{(1+nn)}}{kk} - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v}$ vbi primo notandum eſſe kk quantitatem prae bb minimam, ſimulque proxime eſſe $gg = bb\sqrt{(1-nn)}$ niſi motus gyratorius vehementer fuerit velox. Sit igitur $gg - bb\sqrt{(1-nn)} = \alpha kk$, vt ſit proxime $d\theta = \alpha\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v) - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v}$, qui valor cum θ tantum in terminis minimis occurrat, ad approximandum ſatis eſt exactus.

§. 25. Incipiamus ab aequatione poſteriori, quae hanc indicet formam:

$$\frac{2z\,dz\,d\Phi + zz\,dd\Phi}{d\omega} = \frac{3abb^3\,d\omega\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta}{z^3} = \frac{3abb^3\,d\omega\,\text{ſin.}\,2\theta}{2z^3}$$

et integrando $\frac{zz\,d\Phi}{d\omega} = \frac{3}{2}ab\int\frac{b^3}{z^3}\,d\omega\,\text{ſin.}\,2\theta + Cbb$ at cum ab ſit minimum in hoc termino ſufficit pro z ponere $b(1+n\,\text{cof.}\,v)$, et ob $d\omega = \mu\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)$ erit

$$\frac{zz\,d\Phi}{dv(1+n\,\text{cof.}\,v)} = \frac{3}{2}\mu^2 ab\int\frac{dv\,\text{ſin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} + Cbb$$

Neque vero hinc vtiles concluſiones deducere valebimus, niſi excentricitatem n valde paruam ſtatuamus, quod quidem pro applicatione ad motus planetarum tuto facere poterimus.

§. 26. Hoc autem caſu cum ſit $\frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v} = dv(1-n\,\text{cof.}\,v)$ proxime, erit $d\theta = dv(\alpha-1+(\alpha+1)n\,\text{cof.}\,v)$ hincque $dv = \frac{-d\theta}{1-\alpha-(1+\alpha)n\,\text{cof.}\,v} = -d\theta(-\alpha+(1+\alpha)n\,\text{cof.}\,v)$ et proxime $\frac{dv}{(1+\ \text{cof.}\,v)^2} = -d\theta(1-\alpha-(1-3\alpha)n\,\text{cof.}\,v)$ ſicque erit $\int\frac{dv\,\text{ſin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = -(1-\alpha)\int d\theta\,\text{ſin.}\,2\theta + (1-3\alpha)n\int d\theta\,\text{ſin.}\,2\theta\,\text{cof.}\,v$ ſed ſufficiat ſolum primum terminum retinuiſſe vt integratione inſtituta ſit $\int\frac{dv\,\text{ſin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,\text{cof.}\,2\theta$ ideoque habebitur ſatis accurrate

zzdΦ

$$\frac{zzd\Phi}{dv(1+n\,\text{cof.}\,v)} = Cbb + \tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 ab\,\text{cof.}\,2\theta$$

vnde erit:

$$d\Phi = \frac{Cbb\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)}{zz} + \frac{\tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 ab\,dv(1+n\,\text{cof}\,v)\,\text{cof.}\,2\theta}{zz}$$

§. 27. Sumtis ergo quadratis et minimis neglectis terminis erit

$$z^4 d\Phi^2 = CCb^4 dv^2(1+n\,\text{cof.}\,v)^2 + \tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\mu Cabbb\,dv^2(1+n\,\text{cof.}\,v)^2\,\text{cof.}\,2\theta$$

Iam vero prima aequatio exuta differentialis conſtantis $d\omega$ ratione tranſit in ſequentem,

$$z^3 d\frac{dz}{d\omega} - \frac{z^4 d\Phi^2}{d\omega} + b^3 z\,d\omega = \frac{3abb^3 d\omega(1-3\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2z}$$

At cum ſit $z = b(1+n\,\text{cof.}\,v+p)$ erit $\frac{dz}{b} = -ndv\,\text{ſin.}\,v + dp$ et ob $d\omega = \mu\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)$ erit

$$(1+n\,\text{cof.}\,v+p)^3 d\left(\frac{dp-ndv\,\text{ſin.}\,v}{\mu dv(1+n\,\text{cof.}\,v)}\right) - \frac{CCdv(1+n\,\text{cof.}\,v)}{\mu}$$
$$-\tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\frac{Cab}{bb}dv(1+n\,\text{cof.}\,v)\,\text{cof.}\,2\theta + \mu dv(1+n\,\text{cof.}\,v)(1+n\,\text{cof.}\,v+p)$$
$$= \frac{3\mu ab\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)(1-3\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2bb(1+n\,\text{cof.}\,v+p)}.$$

§. 28. Ponatur iam differentiale dv conſtans, eritque

$$d,\frac{dp-ndv\,\text{ſin.}\,v}{\mu dv(1+n\,\text{cof.}\,v)} = \frac{ddp}{\mu dv(1+n\,\text{cof.}\,v)} + \frac{ndp\,\text{ſin.}\,v}{\mu(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} - \frac{ndv\,\text{cof.}\,v - nndv}{\mu(1+n\,\text{cof.}\,v)^2}$$

et quia eſt approximando:

$$(1+n\,\text{cof.}\,v+p)^3 = (1+n\,\text{cof.}\,v)^3 + 3(1+n\,\text{cof.}\,v)^2 p,$$

erit ſubſtitutione facta, iisque terminis in quibus p plus vna dimenſione obtinet neglectis;

$$\frac{ddp}{\mu dv}(1+n\,\text{cof.}\,v)^2 + \frac{ndp\,\text{ſin.}\,v}{\mu}(1+n\,\text{cof.}\,v) - \frac{ndv(\text{cof.}\,v+n)}{\mu}(1+n\,\text{cof.}\,v)$$
$$-\frac{3npdv(\text{cof.}\,v+n)}{\mu} - \frac{3(1-\alpha)\mu Cabdv(1+n\,\text{cof.}\,v)\,\text{cof.}\,2\theta}{2bb} - \frac{CC}{\mu}dv(1+n\,\text{cof.}\,v)$$
$$+\mu$$

$$+\mu p dv(1+n\,\text{coſ.}\,v)-\frac{3\mu ab dv(1-3\,\text{coſ.}\,\theta^2)}{2bb}+\mu dv(1+n\,\text{coſ.}\,v)^2$$
$$+\frac{3\mu ab p dv(1-3\,\text{coſ.}\,\theta^2)}{2bb(1+n\,\text{coſ.}\,v)}=0.$$

§. 29. Reducatur coſ. θ^2 ad coſinum ſimplicem ponendo coſ. $\theta^2=\frac{1+\text{coſ.}\,2\theta}{2}$, erit $1-3$ coſ. $\theta^2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$ coſ. 2θ, atque aequentur termini, in quibus p non ineſt ſeorſim $=0$, eritque diuiſione per dv peracta:

$$+\mu+2\mu n\,\text{coſ.}\,v+\mu nn\,\text{coſ.}\,v^2=0$$
$$-\frac{CC}{\mu}-\frac{CCn}{\mu}\,\text{coſ.}\,v-\frac{nn}{\mu}\,\text{coſ.}\,v^2$$
$$-\frac{nn}{\mu}-\frac{n}{\mu}\,\text{coſ.}\,v$$
$$-\frac{n^3}{\mu}\,\text{coſ.}\,v$$

cui aequationi vt ſatis fiat, neceſſe eſt, vt ſit:
$\mu=1$ et $CC=1-nn$, ita vt fiat:
$d\omega=dv(1+n\,\text{coſ.}\,v)$ atque

$$d\Phi=\frac{dv(1+n\,\text{coſ.}\,v)\sqrt{(1-nn)}}{(1+n\,\text{coſ.}\,v+p)^2}+\frac{\frac{3}{4}(1-\alpha)ab dv(1+n\,\text{coſ.}\,v)\,\text{coſ.}\,2\theta}{bb(1+n\,\text{coſ.}\,v+p)^2}$$

§. 30. Altera vero aequatio, ex qua valorem ipſius p definiri oportet erit:

$$\frac{ddp}{dv}(1+n\,\text{coſ.}\,v)^2+ndp\,\text{ſin.}\,v(1+n\,\text{coſ.}\,v)+pdv(1-2n\,\text{coſ.}\,v-3nn)$$
$$-\frac{3(1-\alpha)ab dv(1+n\,\text{coſ.}\,v)\,\text{coſ.}\,2\theta}{2bb}\sqrt{(1-nn)}-\frac{3ab p dv(1+3\,\text{coſ.}\,2\theta)}{4bb(1+n\,\text{coſ.}\,v)}$$
$$+\frac{3ab dv(1+3\,\text{coſ.}\,\theta)}{4bb}=0$$

negligantior primo termini angulum θ negligentes vt et excentricitas n erit

$$\frac{ddp}{dv}+pdv-\frac{3ab p dv}{4bb}+\frac{3ab dv}{4bb}=0$$

eritque $p=\frac{-3ab}{4bb-3ab}$, quae eſt pars veri valoris ipſius p neque ab excentricitate n neque ab angulo θ pendens.

§. 31.

§. 31. Maneat adhuc excentricitas n euaneſcens, eritque

$$\frac{ddp}{dv} + pdv - \frac{3abpdv}{4bb} - \frac{9abpdv \text{ coſ. } 2\theta}{4bb} - \frac{3(1-\alpha)abdv \text{ coſ. } 2\theta}{2bb}$$
$$+ \frac{3abdv}{4bb} + \frac{9abdv \text{ coſ. } 2\theta}{4bb} = 0$$

ſit nunc $p = \frac{-3ab}{4bb-3ab} + q$, erit

$$0 = \frac{ddq}{dv} + qdv - \frac{3(1-\alpha)abdv \text{ coſ. } 2\theta}{2bb} + \frac{9abdv \text{ coſ. } 2\theta}{4bb}$$

omiſſis terminis, qui ob $\frac{ab}{bb}$ prae reliquis ſunt minimi, atque facile patet, valorem ipſius q eſſe huiusmodi: $q = \frac{3\beta ab}{4bb}$ coſ. 2θ; nam ob $d\theta = -(1-\alpha)dv$, erit $dq = \frac{3(1-\alpha)\beta abdv \text{ ſin. } 2\theta}{2bb}$ atque $ddq = \frac{-3(1-\alpha)^2\beta abdv^2 \text{ coſ. } 2\theta}{bb}$, quibus valoribus ſubſtitutis fiet diuiſione per $3\,dv$ coſ. 2θ facta

$$0 = \frac{-(1-\alpha)^2\beta ab}{bb} + \frac{\beta ab}{4bb} - \frac{(1-\alpha)ab}{2bb} + \frac{3ab}{4bb}$$

ſeu $0 = \beta(1-4(1-\alpha)^2) + 3 - 2(1-\alpha)$ vnde fit

$\beta = \frac{1+2\alpha}{4(1-\alpha)^2-1} = \frac{1+2\alpha}{3-8\alpha+4\alpha\alpha}$. Erit ergo

$$p = \frac{-3ab}{4bb} + \frac{3(1+2\alpha)ab \text{ coſ. } 2\theta}{4bb(3-8\alpha+4\alpha\alpha)}$$

qui eſt verus valor ipſius p, quatenus is non ab excentricitate n pendet: quia autem hic ipſe valor valde eſt paruus, eius partes ab excentricitate n pendentes, vtpote multo minores facile negligere licet.

§. 32. Quoniam haec potiſſimum ad motum lunae accommodare animus eſt, propterea quod lunae corpus ob eius motum libratorium ita formatum videtur, vt notabiliter a figura Sphaerica diſcrepet, poſitiones noſtras ita definiamus, vt ad lunam pertinere videantur. In luna autem directio virgae A B conſtanter propemodum in

rectam C O incidit, vnde ſit angulus θ fere $= 0$, ideoque ſtatui debet $\alpha = 1$, ob $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha + 1)n \operatorname{coſ.} v)$, eritque $p = -\frac{7ab}{4bb} - \frac{5ab}{4bb} = -\frac{3ab}{bb}$ ob coſ. $2\theta = 1$. Hinc fiet.

$$z = b\left(1 - \frac{3ab}{bb} + n \operatorname{coſ.} v\right)$$

et $d\Phi = \frac{dv(1 + n \operatorname{coſ.} v)\surd(1 - nn)}{\left(1 - \frac{3ab}{bb} + n \operatorname{coſ.} v\right)^2}$

§. 33. Ponatur breuitatis gratia $1 - \frac{3ab}{bb} = m$

erit $\frac{1}{(m + n \operatorname{coſ.} v)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{2n \operatorname{coſ.} v}{m^3} + \frac{3nn \operatorname{coſ.} v^2}{m^4}$

reiectis terminis, in quibus altiores poteſtates ipſius n occurrunt. Multiplicetur per $1 + n \operatorname{coſ.} v$

ac fiet $\frac{1}{m^2} + \frac{n \operatorname{coſ.} v}{mm} - \frac{2nn \operatorname{coſ.} v^2}{m^3}$

$$- \frac{2n \operatorname{coſ.} v}{m^3} + \frac{3nn \operatorname{coſ.} v^2}{m^4}$$

quae inſuper per $\surd(1 - nn) = 1 - \frac{1}{2}nn$ multiplicata

dat $\frac{2 - nn}{2mm} - \frac{n(2 - m) \operatorname{coſ.} v}{m^3} + \frac{nn(3 - 2m) \operatorname{coſ.} v^2}{m^4}$.

At ob coſ. $v^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{coſ} 2v$ habebitur

$$\frac{2mm - mmnn + 3nn - 2mnn}{2m^4} - \frac{n(2 - m) \operatorname{coſ.} v}{m^3} + \frac{nn(3 - 2m) \operatorname{coſ.} 2v}{2m^4}$$

quae per dv multiplicata dat valorem ipſius $d\Phi$

§. 34. Habebimus ergo hanc aequationem

$$d\Phi = \frac{dv}{mm} + \frac{nn(1 - m)(3 + m)dv}{2m^4} - \frac{n(2 - m)dv \operatorname{coſ.} v}{m^3}$$

$$+ \frac{nn(3 - 2m)dv \operatorname{coſ.} 2v}{2m^4}$$

cuius integrale eſt

$$\Phi = C + v\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1 - m)(3 + m)}{2m^4}\right) - \frac{n(2 - m) \operatorname{ſin.} v}{m^3}$$

$$+ \frac{nn(3 - 2m) \operatorname{ſin.} 2v}{4m^4}$$

vbi

vbi eſt $m = 1 - \frac{3ab}{bb}$. Denotat autem v anomaliam excentricam, quae ita eſt comparata, vt, ſi anomalia media ponatur $= u$, ſit $u = v + n$ ſin. v.

§. 35. Ponatur in primo termino pro v eius valor $u - n$ ſin. v, erit:

$$\Phi = C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right)$$
$$-\left(\frac{2}{m^3} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) n \text{ ſin. } v$$
$$+ \frac{nn(3-2m)}{4m^4} \text{ ſin. } 2v$$

vbi duo vltimi termini continent aequationem centri, quae indicat, quantum locus medius a vero diſtet. Primi ergo termini

$$C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right)$$

deſignant locum medium.

§. 36. Erit ergo motus medium ad motum anomaliae mediae, vt

$$u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) \text{ ad } u$$

ſed cum non ſolum nn ponatur valde paruum, ſed etiam $1 - m = \frac{3ab}{bb}$, ſit vehementer paruum, alterum terminum negligere licet, ita vt ſit motus medius ad motum anomaliae vti $\frac{1}{mm}$ ad 1, ſeu vt 1 ad mm, quae ratio erit, vt 1 ad $\left(1 - \frac{3ab}{bb}\right)^2$ ſeu vt 1 ad $1 - \frac{6ab}{bb}$. Motus medius autem erit ad motum Aphelii, ſi O ſit ſol, ſeu ad motum Apogaei, ſi O ſit terra, vt 1 ad $\frac{6ab}{bb}$. Sicque Aphelium ſeu Apogaeum in conſequentia promouetur; et quidem interuallo vnius reuolutionis ſecundum motum medium per ang: $= \frac{6ab}{bb} \cdot 360°$.

§. 37. Egregie haec concluſio quadrat in motum lunae, cuius Apogaeum fere duplo celerius progreditur, quam per Theoriam inuenitur. Obſeruationes enim praebent motum lunae medium ad motum anomaliae mediae, vt 1, 0085193 ad 1, ita vt motus medius ſit ad motum Apogaei vt 1, 0085193 ad 0, 0085193, hoc eſt, vt 1 ad 0, 0084473. Per Theoriam autem ob actionem ſolis motus lunae medius ad motum Apogaei tantum eſſe deberet vt 1 ad 0, 0041045, vnde exceſſus motus Apogaei veri ſupra Theoreticum eſt ad motum medium vt 0, 0043428 ad 1.

§. 38. Ad modum ergo probabile videtur, hunc motus Apogaei lunae exceſſum inde oriri, quod lunae corpus ſit oblongum, eiusque axis longior perpetuo ad centrum terrae fere directus. Atque hinc etiam ratio figurae iſtius oblongae definiri poterit, cum eſſe debeat $\frac{6ab}{bb} = 0,\ 0043428$. Poſito enim in ſemidiametris terrae $b - 60$, fiet $ab = 2,\ 60568$, et ſi fingamus $a = b$ ſeu $CB = CA$, foret $CA = CB = 1\frac{1}{4}$: hinc ue prodiret tota diſtantia ſeu longitudo virgae $AB = 2\frac{1}{2}$ ſemid. terrae. Luna ergo, cum non ſit virga duobus globis onuſta, vt eius figura quaſi aequiualeat, multo longior eſſe deberet, ac fortaſſe 3 diametros terrae ſuperare, ita vt eius axis longior plus quam octies excederet breuiorem, quod vix veriſimile videtur.

§. 39. Quodſi ergo huiusmodi figura lunae oblonga non toleranda videatur, etſi fortaſſis minor a figura Sphaerica defectus aliquid ad Apogaei accelerationem conferre poſſit; alia certe vis adeſſe debet inſuper in lunam

agens

agens, quae tanto Apogaei motui producendo par ſit: ſeu ſtatuendum erit, vim terrae, lunam trahentem, non exacte eſſe quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem: quod cum ex nonnullis lunae exiguis inaequalitatibus, quae Theoriae repugnant, concludendum videtur, tum etiam inde, quod parallaxis lunae vera integro fere minuto maior deprehenditur, quam ſecundum Theoriam eſſe deberet.

DE MACHINIS IN GENERE

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Cum diſciplinae Mathematicae ſemper ob certitudinem et perſpicuitatem, qua reliquis artibus longe antecellunt, magni ſint aeſtimatae et collaudatae, tum imprimis propter ſummam vtilitatem, quam ad commune vitae commodum afferre videntur, omni honore, ſtudiisque hominum digniſſimae ſunt habitae. Quem ad modum enim vix vllum vitae genus Arithmetica carere poteſt, neque pauca Geometriae cognitionem requirunt, atque Aſtronomia ad vitam commode inſtituendam plurima adminicula ſuppeditat; ita Mechanicae vſus latiſſime patet, cum pleraeque artes ope Machinarum, quarum inuentio et perfectio Mechanicae debetur, abſoluuntur. Quos inſignes vſus cum ſola Matheſis elementaris, quae iam a longo tempore eſt inuenta et pertractata, praeſtare putetur, non leues inde obiectiones contra vtilitatem Matheſeos ſublimioris, quae hoc imprimis ſeculo excoli eſt coepta, opponi ſolent; quod ab vſu populari abhorreat, nimisque ſit ardua, quam vt vllum ex ea commodum in commune bonum redundare poſſit.

§ 2. Quamquam autem incrementa Aſtronomiae aliarumque Matheſeos partium, quae recentiori Analyſi ſublimiori dictae accepta ſunt referenda, eam ab iſtis obiectionibus

nibus iam ſatis ſuperque vindicare videntur; tamen ipſa Mechanica vulgaris, quae in Machinis inſtruendis et explicandis verſatur, ſummam Analyſeos non ſolum vtilitatem, ſed etiam neceſſitatem, clariſſime euincit. Quaecunque enim in Mechanica de natura et vſu Machinarum tradi ſolent, tam ſunt imperfecta, et plerumque omni fundamento deſtituta, vt maxime mirandum ſit, communem opinionem de eius eximio vſu tamdiu ſuſtentari potuiſſe: hic autem defectus nulli alii cauſae, niſi ignorationi Analyſeos ſublimioris, adſcribi poteſt, quippe cuius adminiculo demum cognitio Machinarum perfici, atque ad exoptatum vſum in vita communi accommodari queat.

§. 3. Maxime autem vulgarem Mechanicae doctrinam de Machinis eſſe imperfectam, iam pridem non obſcure, qui in Machinis elaborandis ſunt occupati, animadverterunt. Quantumuis enim nouae cuiuspiam Machinae ſtructura principiis Mechanicae conformis videatur, tamen de eius effectu vix quicquam ante polliceri licet, quam experientiae approbatio acceſſerit: et, quamquam ſaepe ii, qui multum operae ſtudiique in Machinis conſtruendis conſumſerunt, tantam ſagacitatem longo vſu ſint adepti, vt de effectu earum certo pronunciare auſint, antequam experientiam conſuluerint, tamen tantum abeſt, vt hoc ſcientiae ipſorum Theoreticae tribui poſſit, vt potius ſoli experientiae adſcribi debeat. Hinc qui ſolis regulis, quae vulgo in Mechanicae elementis tradi ſolent, imbutus ad Machinarum fabricam ſe accingit, de earum ſucceſſu vel nihil praedicere valebit, vel ſpe concepta ſaepiſſime fruſtrabitur. Ex quibus clariſſime perſpicitur, cognitionem Machinarum vulgarem, qualis in Mechanicae elementis ex-

exponitur, maxime eſſe mancam, nihilque minus quam Theoriae nomen mereri.

§. 4. Cum autem ii, qui nihilominus cognitionem Machinarum Theoreticam profitentur, eamque aduerſus obiectiones practicorum defendere ſuſtinent, hunc defectum ac perpetuum fere ab experientia diſſenſum tollere nequeant, omnem culpam in frictionem transferre ſolent; hacque ſola effici, vt Machina alioquin ſecundum praecepta Mechanicae diligentiſſime inſtructa ſaepe numero ſperato effectu excidat. Quamquam autem frictio actionem Machinarum non mediocriter perturbat, tamen immerito omnis culpa in eam transfertur. Cognitio enim Machinarum, quae vulgo ab his hominibus oſtentatur, tam eſt imperfecta, vt etiamſi nulla omnino frictio adeſſet, tamen nihil quicquam de effectu Machinarum accurate definiri poſſet. Hunc igitur ſummum Mechanicae vulgaris defectum hic diligentius expendere, et quem ad modum per ſolam Analyſin ſublimiorem tolli poſſit, vberius explicare conſtitui; cum vt inſignem huius nouae Matheſeos partis vtilitatem, quae vulgo in dubium vocari ſolet, luculenter ob oculos ponam, tum vero imprimis, vt doctrinam ipſam de Machinis pro viribus perfectiorem reddam.

§. 5. Primum igitur vniuerſa de Machinis doctrina vulgo principiis aequilibrii ſuperſtrui ſolet: quibus magnitudo ac directio virium determinatur, quae obiecto cuicunque applicatae in aequilibrio conſiſtunt. Hinc propoſita quaecunque Machina, in Mechanica vulgari nihil aliud inueſtigatur, praeter rationem vis ſollicitantis ad onus ſuperandum, quae ad ſtatum aequilibrii requiritur: ita ſi vis alteri vectis termino, pondus vero alteri ſit applicatum

tum, demonſtratum eſt ad aequilibrium obtinendum, vim ad pondus rationem reciprocam diſtantiarum ab hypomochlio tenere oportere In Machinis autem vtcunque compoſitis ex iisdem principiis proportio inter vires ſollicitantes et onera ſuperanda, qua aequilibrium efficitur, non difficulter definitur; hacque determinatione tota Machinarum tractatio abſolui ſolet. Altum vero vbique deprehenditur ſilentium de motu, qui ſublato ſtatu aequilibrii ſit inſecuturus, niſi quod generatim notetur, ſi vis ſollicitans maior fuerit, quam effectio aequilibrii exigat, onus promotum iri, ſi quidem vis frictioni ſimul ſuperandae par ſit.

§. 6. Tum vero etiam ex indole et proportione partium Machinae definiri poteſt, ſi potentia ſeu vis, ſiue trahens ſiue pellens, data celeritate progrediatur, quanta celeritate ipſum onus promoueatur. Quam enim rationem inter potentiam et onus ſtatus aequilibrii poſtulat, eadem ratio, ſed inuerſa, inter celeritatem potentiae et oneris intercedit, vndecunque motus ſit profectus. Hinc notus ille Mechanicae canon originem habet, quo promotio oneris eo tardior eſſe affirmatur, quo minor potentia ad aequilibrium requiratur, ſi quidem potentia data celeritate progrediatur. Quae regula, niſi longius, quam par eſt, extendatur in diſpoſitione Machinarum ſaepe eximium habet vſum, ſed nihil prorſus confert ad ipſum motum, qui ſublato ſtatu aequilibrii re uera ſubſequitur, definiendum. Cum igitur omnes Machinae ad motum deſtinentur, nullaque conſtrui ſoleat, quae in ſtatu aequilibrii effectum deſideratum praeſtet; manifeſtum eſt, actionem et effectum Machinarum nullo modo ex memoratis Mechanicae principiis

cipiis explicari ac definiri poſſe: ſatis enim conſtat, ad motum determinandum principia aequilibrii minime ſufficere, ſed praeterea cognitionem legum motus requiri, quae ſine analyſi ſublimiori neque tradi neque ad vſum applicari poſſunt.

§. 7. Cum autem pono, ſi ſtatus aequilibrii cuiuspiam Machinae ſpectatur, relatio inter vim potentiae protrahentem, et vim oneris contrariam, qua Machinam in plagam oppoſitam mouere conatur, determinetur, manifeſtum eſt, plurimas Machinas ne hanc quidem determinationem admittere. Si enim onus ope Machinae horizontaliter ſit promouendum, nullam vnquam viri ad Machinam repellendam exercet, quemadmodum euenit, ſi pondus perpendiculariter eleuari debeat; iſto igitur caſu vel minima vis, dummodo frictioni ſuperandae ſufficiat, onus promouere valebit, maior autem motum celeriorem producet, quam minor, neque idcirco ſtatui aequilibrii vllus locus relinquitur. Hoc idem euenit in horologiis, molendinis, aliisque huius generis Machinis, in quibus nulla cuiusquam ponderis eleuatio intenditur, ſed omnis effectus in ſolo Machinae motu producendo conſumitur. De hoc ergo Machinarum genere nihil eſt, quod in vulgari Mechanica tradi queat, praeter meram ac nudam partium deſcriptionem et coagmentationem; cum tamen in praxi multo amplior et accuratior cognitio requiratur.

§. 8. Si enim ad certum quemdam effectum producendum Machina proponitur, parum quidem refert noſſe, quanta vi ad aequilibrium conſeruandum opus ſit, ſi quidem Machina ad id genus pertineat, in quo ſtatus aequilibrii datur; ſed vel maxime intereſt noſſe, quanta celerita-

celeritate deſideratus effectus a qualibet vi Machinae iſtius operedatur; vt ſi forte effectus nimium fuerit lentus, vel ſcopo non conformis, Machina repudiari poſſit, antequam per experientiam incepta fuerit deprehenſa. Huiusmodi accurata motus a data vi oriundi determinatio etiam maxime neceſſaria eſt, ſi plures Machinae ad eundem finem obtinendum proponuntur, quo ea, quae promtiſſimum, vel intentioni maxime conuenientem effectum producat, reliquis anteferri queat. Quin etiam Theoriam eousque perfici conueniet, vt propoſito quocunque opere abſoluendo, inter omnes omnino Machinas, quae ad id exſequendum excogitari queant, ea potiſſimum aſſignari poſſit, quae hoc opus vel breuiſſimo tempore, vel minimo virium diſpendio, vel alio modo, qui maxime idoneus videatur, peragere valeat.

§. 9. Momentum harum quaeſtionum vnico eoque facili exemplo docuiſſe ſufficiat. Ponamus onus mille librarum verticaliter eleuari debere a vi, quae valeat 100 libras, ad hocque opus nos vti velle axe in peritrochio. Primum quidem perſpicuum eſt, ſi radiorum alter decies longior aſſumatur altero, vim cum onere in aequilibrio fore conſtitutum, nullumque motum ſequi. Quo igitur onus eleuetur, neceſſe eſt, vt radius maior plus quam decies longior altero ſtatuatur; facile quoque eſt praeuidere, ſi is vndecies tantum longior capiatur, lentiorem motum eſſe inſecuturum, quam ſi duodecies longior caperetur: neque quisquam dubitabit, ſi maior radius vel tredecies, vel decies quater, vel vltra longior caperetur, motum adhuc celeriorem eſſe proditurum. Deinde vero pariter non eſt dubium, quin ſi maior radius millies, vel decies millies, longior efficeretur altero, motum iterum tardiorem productum iri. Creſcet

ergo celeritas eleuationis ad certum vsque longitudinis terminum, quem ſi transgrediatur, iterum decreſcat. Merito ergo quaeſtio inſtituitur, quoties radium alterum longiorem altero conſtitui oporteat, vt onus citiſſime eleuetur.

§ 10. Quantopere autem haec aliaeque huius generis quaeſtiones, quae ad veram Machinarum Theoriam omnino ita pertinent, vt niſi eae reſolui queant, Theoria maxime imperfecta cenſeri debeat, communis Mechanicae limites transgrediantur, quilibet, qui vel allatum leue exemplum attentius perpenderit, facile agnoſcet. Nihil enim prorſus in omnibus libris, qui glorioſum Theoriae Machinarum titulum prae ſe ferunt, inueniet, quo iſti quaeſtioni vllo modo ſatisfacere poſſet. Magis ergo ardua eſt haec quaeſtio, et cum vulgaria Mechanicae praecepta huc nihil conferant, ad Matheſin ſublimiorem dictam eſt confugiendum, in qua cum non ſolum verae motus leges explicentur, ſed etiam ad quosuis caſus, quibus motus producitur, ope calculi infinitorum accommodentur; ea ſola veros nobis aperiet fontes, ex quibus ſolutionem huiusmodi quaeſtionum haurire liceat. Quod quo facilius fieri poſſit, praecipua ante momenta, quae in omnibus Machinis occurrunt, diligenter examinari, et quantum ſingula ad motum cum promouendum tum impediendum afferant, ſedulo determinari conueniet. Hac enim tractatione praemiſſa non difficulter omnis generis Machinae ad calculum reuocari, earumque effectus accurate definiri poterunt.

§. 11. In omni autem Machina tres res ſunt conſiderandae: primo ſcilicet vis, quae Machinae motum inducit;

ducit; ſecundo ipſa Machina, ſeu eius ſtructura, partiumque, quibus conſtat coagmentatio; ac tertio onus mouendum; quamquam enim in pluribus Machinis nullum onus occurrit, ſed totus Machinae effectus in ipſius motu conſiſtit, tamen haec diuiſio tripartita non impedit, quo minus etiam huius generis Machinae in tractatione comprehendantur: quippe quae exoriuntur, ſi onus mouendum omittatur, vel euaneſcens aſſumatur. Hae porro tres res duplici modo debent perpendi; vel per ſe, vel ratione motus, quem ſingulae ſuſcipiunt. In Machina enim ipſa eius ſtructura probe eſt diſtinguenda a motu, qui ei ſingulisque eius partibus inducitur; propterea quod Machina non ſolum vi in onus transferendae inſeruit, ſed etiam ob motum, quem ipſa accipit, aliquam vis ſollicitantis partem conſumit; hocque ipſo effectum, qui alias produceretur, non parum imminuit.

§. 12. Quod igitur primum ad vires, quibus Machinae impelli ſolent, attinet, earum plurima genera adhibentur, quae omnia enumerare difficile foret; cuiusmodi ſunt pondera, elaſtra, vires humanae et animales, impulſiones aquarum, et venti, ignis, fumus, etc. Circa has autem vires ante omnia attendendum eſt, vtrum indeſinenter agant, an per interualla? an perpetuo aequali vi vrgeant, an modo intendantur, modo remittantur? et quandoque per aliquod interuallum penitus ceſſent. Ad quem caſum referendae ſunt percuſſiones, quarum actio ex regulis colliſionis definiri debet. Quando autem ſine interruptione operantur, earum vera quantitas eſt ſpectanda, quam ſemper per pondus quodpiam exponere licet. Scilicet quacunque vi Machina impellatur, pondus aſſigna-

ri poterit, quod tantumdem vrgeat et cum menſura ponderum ſit notiſſima loco cuiuslibet vis mente ſubſtituere licebit pondus aequiualens; quod pro natura vis ſollicitantis, vel conſtantis erit quantitatis, vel variabilis. Quin etiam ſi Machina percuſſionibus ad motum incitetur, quouis momento preſſio aequalis ſubſtitui poteſt, ſed plerumque calculus contrahitur, ſi regulae colliſionis in ſubſidium vocentur.

§. 13. Quaecunque autem vis ad Machinam impellendam adhibeatur, ea ſemper cum quadam materia eſt coniuncta, quae ſimul moueri debet; quam inertiam vis ſollicitantis appellabimus. Haec ſi ſolus ſtatus aequilibrii determinatur, omnino non in computum ingreditur, quoniam aequilibrium a ſola quantitate virium impellentium pendet, nihilque intereſt, vtrum inertia adſit an ſecus? ſimulac vero motus generatur, omnis materia, quae motum recipit, attente eſt conſideranda, quippe ad quam mouendam portio quaedam virium impenditur. Quantitas igitur eius materiae, in qua ipſa vis impellens reſidet, ſedulo eſt attendenda, et quantum motum, dum Machina mouetur, ipſa nanciſcatur, definiri debet. Quo plus enim materiae, vel quo maior inertia cum vi ſollicitante fuerit connexa, eo tardior orietur motus. Sic praeter virium varietates ante commemoratas duae res in qualibet vi, qua Machina ad motum concitatur, potiſſimum erant conſiderandae: primo ſcilicet ipſa cuiusque vis quantitas; ac deinde eius inertia: quarum illa per pondus, haec vero per quantitatem materiae, quae pariter ad pondus, reuocari poteſt, menſurari ſolet.

§. 14.

§. 14. In ipſa deinde Machina eius ſtructura, et modus, quo ſingulae partes inter ſe ſunt connexae, perpendi debet: ex quibus, ſi vnius partis vel ſolum puncti motus fuerit cognitus, ſimul omnium reliquarum partium motus innoteſcet. Hinc cum vis ſollicitans Machinae ſit applicata, ſi celeritas ipſius vis fuerit inuenta, ſimul motus ſingularum Machinae partium cognoſcetur. Verum praeterea in motus productione ipſius quantitatis materiae, ex qua Machina componitur, ratio eſt habenda; quam inertiam ipſius Machinae vocabimus. Haec primum ex quantitate materiae ſeu pondere cuiusque partis eſt aeſtimanda; tum vero cum reluctatio inertiae eo magis ſe exerat, quo celerior fuerit motus; ſi diuerſae Machinae partes diuerſis celeritatis gradibus moueantur, haec circumſtantia ſimul in computum eſt ducenda. Scilicet ſi omnes Machinae partes motibus paribus progrediantur, vt nulla adſit motu svarietas, ſufficiet, ipſam materiae quantitatem eiusu epondus noſſe: ſin autem, vt plerumque fit, motus gyratorius circa axem quempiam generetur, tum momentum inertiae reſpectu huius axis computatum, in motus determinationem ingredietur: quae circumſtantia ſaepe actionem Machinarum determinatu difficillimam reddere ſolet.

§. 15. Reſtat ergo onus conſiderandum, quod ope Machinae promoueri debet, niſi forte totus effectus in ſolo Machinae motu conſiſtat. Circa onus autem primo diſpiciendum eſt, vtrum praeditum ſit vi Machinam ſollicitante, vti euenit, ſi pondus eleuari debet, an vero tantum ratione inertiae actioni Machinae reluctetur, velut ſi pondus ſecundum directionem horizontalem ſit protrahendum:

hendum: illam vocabimus oneris vim renitentem, cuius ratio in determinatione ſtatus aequilibrii haberi debet; hanc vero inertiam oneris dicemus, quae in motu demum ſpectanda venit. Ad vim oneris renitentem denique frictio tota, qua tam motus Machinae, quam ipſius oneris impeditur, commode reuocari poteſt. Per experientiam enim conſtat, frictionem eandem exercere effectum, ac ſi maior vis oneris renitens eſſet ſuperanda, quae etſi in quiete Machinae nullam vim inferat, in motu tamen vicem vis motum retardantis ſuſtineat, et quidem conſtantis maneat quantitatis, ſiue motus tardior ſit, ſiue celerior. Quare ſi vnico experimento magnitudo frictionis fuerit explorata, eam tantum vi oneris renitenti addere conueniet, quo pacto calculus Machinarum ob frictionem non amplius perturbabitur.

§. 16. Dum autem motus cuiusque Machinae per calculum determinatur, imprimis neceſſe eſt, vt vires, quibus ſingulae Machinae partes in ſe inuicem agunt, accurate definiantur; quo conſtet, quantam vim cum rotae, tum funes, tum axes, ſuper quibus partes Machinae rotantur, etiam durante motu ſuſtineant. Niſi enim de hoc fuerimus certi, difficile foret partes Machinae vel non nimis imbecilles efficere, vel non nimis robuſtas: quorum prius Machinam prorſus inutilem redderet, ſi quidem vi, quam in actione ſubit, ſuſtinendae par non eſſet. Poſterius vero non parum Machinae officit, ſi enim praeter neceſſitatem nimis robuſta et fortis conſtrueretur, ob maiorem inertiam totus motus retardaretur; huicque incommodo ſola Matheſis ſublimior medelam afferre valet. His igitur, quae ad actiorem Machinarum in genere ſpectant, expoſitis, ſingula Machinarum genera ſecundum hoc inſtitutum pertractabo, ac primo quidem a ſimplicioribus exordiar.

II.

II.
DE PROMOTIONE SIMPLICI.

§. 1.

Promotionem ſimplicem voco, quando onus, vel immediate a potentia promouetur, ſiue trahendo ſiue trudendo, vel ope huiusmodi Machinarum ſimplicium, quibus actio potentiae neque augetur neque imminuitur: quod fit vel funibus nudis vel trochleis, quae circa axes fixos ſint mobiles, innixis. His ſcilicet caſibus onus eadem celeritate promouetur, qua ipſa potentia, ſeu vis mouens, procedit: ita vt per quantum ſpatium potentia iam proceſſerit, per tantumdem ſpatium onus ſit protractum. Ab hoc autem caſu potiſſimum exordior, cum quia eſt ſimpliciſſimus, eiusque cognitio ad omnis generis Machinas examinandas ſummopere neceſſaria, tum vero, quia hic locus maxime idoneus conceditur de frictione tractandi: quae doctrina nondum ſatis explicata neque ad actionem Machinarum accommodata videtur; praecipue quando frictio ad axem, circa quem pars Machinae eſt mobilis transfertur.

§. 2. Ponamus ergo primo onus *a b c d* ſuper plano horizontali A B promoueri debere, ad hocque adhiberi potentiam, cuius directio pariter ſit horizontalis, et quae onus vel trudendo in puncto E propellat, vel trahendo ſecundum F *p* protrahat. Tranſeat autem directio vis ſiue trudentis P E, ſiue trahentis F *p* per oneris centrum grauitatis, ne, etiamſi onus liberum eſſet, in eo vllus alius motus praeter progreſſium horizontalem generetur. Quando enim directio vis vrgentis non Tab. V. Fig. 2.

per centrum grauitatis oneris tranſit, tum ei praeter motum progreſſiuam rotationem quamdam imprimere conabitur, qui etſi a firmitate plani A B, cui incumbit, impediatur, tamen appreſſionem oneris ad hoc planum immutat, cuius cognitio ſaepe numero non parui eſt momenti. Sin autem ad hanc appreſſionem non reſpiciamus, perinde eſt, vtrum directio vis ſollicitantis per oneris centrum grauitatis tranſeat, nec ne? dummodo corpori re ipſa nullum motum rotatorium inducat.

§. 3. Ponamus praeterea planum A B eſſe politisſimum, vt onus in motu ſuo nullam frictionem ſentiat, quia effectum frictionis deinde ſeorſim ſum contemplaturus. Hic igitur ſolum onus et potentia vrgens in computum ingredietur. Sit maſſa oneris $= Q$, quae eius pondere menſuratur, et qua tantum motui reluctatur, quia ob motum horizontalem nullam vim potentiae contrariam ſeu reniſum exerit. Potentiae vero ſollicitantis quantitas ſit $= p$, inertia autem, ſeu quantitas materiae, quae cum potentia eſt coniuncta, cum eaque ſimul mouetur, ſit $= P$; vbi tam P quam p ponderibus metiri licet. Conſecerit tam potentia quam onus motu iam viam ſeu ſpatium $= z$: et vtrumque habeat celeritatem, quantam graue ex altitudine v libere cadendo adipiſci ſolet. Cum igitur a vi p quouis momento maſſa ſeu inertia $P + Q$ accelerari debeat, ex principiis Mechanicis habebimus hanc aequationem $dv \frac{pdz}{P+Q}$, quae integrata dat $v = \frac{pz}{P+Q}$.

§. 4. Cum igitur celeritas ipſa ſit radici quadratae ex altitudine v proportionalis; ſi enim v in partibus milleſimis pedis Rhenani exprimatur, eius radix quadrata $\sqrt{v}$ per 4 diuiſa indicabit, quot pedes Rhenanos corpus hac celeritate vniformiter motum ſingulis minutis ſecundis

eſſet

eſſet percurſurum: onus motu vniformiter accelerato promouebitur, niſi quatenus a reſiſtentia aeris impeditur. Si tempus praeterea, quo iam ſpatium z abſoluit, ponatur $= t$. ob $dt = \frac{dz}{\sqrt{v}}$ erit $dt = \frac{dz\sqrt{(P+Q)}}{\sqrt{pz}}$ et $t = \frac{2\sqrt{z(P+Q)}}{\sqrt{p}} = 2\sqrt{\frac{P+Q}{p}.z}$. Quae formula ſi per 250 diuidatur, dum ſpatium z in partibus milleſimis pedis Rhenani exprimitur, indicabit numerum minutorum ſecundorum tempori t conuenientium. Vnde viciſſim ſi tempus t in minutis ſecundis exprimatur, vt ſit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{P+Q}{p}z}$ erit $z = 15625\, tt . \frac{p}{P+Q}$ part. mill. ped. Rhenani; ſeu $z = \frac{15625}{1000} . \frac{p}{P+Q}$ ped. Rhen: ſicque per quantum ſpatium onus dato tempore promoueatur, definiri poterit.

§. 5. Cum autem hic caſus nusquam locum inueniat, ponamus inſuper frictionem accedere, qua fit, vt ſimul atque onus mouetur, vi propellenti perinde reſiſtat, ac ſi quadam vi contra vrgeretur: hocque vi reſiſtente ipſa frictio menſurari ſolet. Prouenit ea vero partim ab aſperitate ſuperficierum ſe in motu fricantium, partim ab appreſſione earum mutua. Quanquam autem videtur quoque a magnitudine ſpatii $a b$, quo fit contactus, pendere tamen plurimis experimentis ab *Amontono* inſtitutis euictum eſt, magnitudinem contactus nihil ad frictionem conferre, ſed totam ſoli appreſſioni eſſe proportionalem, ſi aſperitas maneat eadem. Atque in plerisque tabulis ligneis modice laeuigatis inuenit frictionem fere tertiae parti eius vis, qua onus ad tabulam apprimatur, eſſe aequalem. Hinc ſi A B eſſet huiusmodi tabula lignea, quoniam appreſſio toti ponderi oneris Q aequatur, frictio foret $= \frac{1}{3}$ Q. Maior autem minorue erit,

ſi ſuperficies A B magis minusue aſpera fuerit. Quo igitur determinatio latius pateat, frictionem ponamus $= F$, vbi tenendum eſt, fore $F = \frac{1}{n} Q$, denotante n numerum ſiue maiorem ſiue minorem quam 3.

§. 6. Cum igitur frictio F, dum onus mouetur, vi propellenti p ſit contraria, ea a vi p ſubtrahi debebit, onusque perinde mouebitur, ac ſi ſublata frictione propelleretur a vi $= p - F$. Quare confecto ſpatio z celeritas oneris debita erit altitudini v, ita vt iam ſit $v = \frac{(p-F)z}{P+Q}$: atque tempore t minutorum ſecundorum onus promouebitur per ſpatium tot pedum Rhen: quot vnitates iſta expreſſio $\frac{15625\,tt}{1000} \cdot \frac{p-F}{P+Q}$ indicabit. Hic igitur ante omnia aduertendum eſt, onus de loco non moueri, niſi ſit $p > F$, hoc eſt, niſi vis pellens p fuerit maior quam frictio F: et quamdiu vis vrgens p ſit minor, onus in quiete perſiſtere. Hic enim non, vti alias in calculo fieri ſolet, valorem ipſius v, caſu quo $p < F$ negatiuum concludere licet; vt motus in contrariam plagam dirigatur: quoniam frictio, etſi vi pellenti eſt contraria, tamen hunc effectum non niſi in motu exerit, atque in quiete penitus ceſſat. Quod notandum eſt, ne per huiusmodi formulas perperam intellectas in errores ſeducamur.

§. 7. Hic igitur ſimpliciſſimus ſe nobis offert modus quantitatem frictionis explorandi per experimenta. Corpore enim quocunque $a\,b\,c\,d$ plano horizontali A B impoſito, ei in directione horizontali F p ope fili ſeu funiculi applicentur ſucceſſiue maiores vires; donec corpus moueri incipiat; quae experimenta commodiſſime inſtituentur, ſi funiculus in p trochleae liberrime mobili imponatur

tur

tur, eique continuo maiora pondera appendantur. Tum enim frictio ei ponderi erit aequalis cenſenda, a quo corpus primum promoueri inceperit. Hoc autem modo *Amontonus* deprehendit, ſi aſperitas fuerit eadem, frictionem ad pondus corporis perpetuo datam et conſtantem rationem tenere; neque quantitatem contactus *a b* quicquam ad frictionem conferre. Ab aliis quidem haec regula deinceps in dubium eſt vocata, qui pariter experientiae innixi eam falſitatis arguere voluerunt. Verum hi ad frictionem, quae in motu gyratorio cernitur, potiſſimum reſpexerunt: quae autem hoc caſu longe aliter motui reſiſtit, vti infra docebo, ita vt hinc nulla obiectio firma contra regulam *Amontonianam* peti poſſit. Interim tamen optandum eſſet, vt haec experimenta cuncta omni adhibita ſolertia repetantur; atque nunc quidem ope perfectionis Theoriae ab omnibus dubiis liberentur.

§. 8. Ex formula inuenta $v = \frac{(p-F)z}{P+Q}$ apparet, frictione F non obſtante, onus motu vniformiter accelerato promotum iri, ſi quidem reſiſtentia aeris negligatur. Verum in hac formula aſſumſimus vim vrgentem p perpetuo eandem quantitatem retinere, ſiue motus fuerit tardior ſiue celerior; quem ad modum euenit, ſi promotio ope ponderis deſcendentis efficiatur, quippe quod perinde trahere pergit, ſiue demum deſcendere incipiat, ſiue iam celeritatem quamcunque acquiſiuerit. Sin autem aliae vires adhibeantur, eae plerumque eo minores euadunt, quo celerius iam ipſae mouentur: quod imprimis in viribus hominum et animalium vſu venit, quae quo celerius iam onus promoueant, eo minores vires ad nouam accelerationem procurandam exerere valent. His ergo caſibus littera p erit variabilis, atque a celeritate iam acquiſita, ſeu altitudine ei debita v

pendebit, cuius variabilitatis ratio proinde in integratione formulae $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$ erit habenda, antequam ipſe motus definiri queat.

§. 9. Ponamus onus Q ab homine ſecundum directionem horizontalem A B progrediente trahi, et cum homo omnibus viribus adhibitis certum celeritatis gradum in currendo ſuperare nequeat, manifeſtum eſt, ſi hunc gradum iam attigent, tum nullam amplius vim ad protractionem oneris impendere poſſe, ſed omnes, quibus pollet, vires ad ſui ipſius motum continuandum conſumi, ex quo euidens eſt, hominem eo minorem vim in onus exerere poſſe, quo celerius iam ipſe progrediatur. Quanquam autem hanc diminutionem accurate definire non liceat, tamen coniectando formulam a vero parum diſcrepantem conſequemur, ſi duobus tantum caſibus ſatisfaciamus. Sit igitur g vis maxima, quam homo quieſcens ad promotionem oneris impendere valeat: h autem ſit altitudo debita celeritati, qua cum ſi homo progrediatur, nullam amplius vim exerere queat. Debebit ergo p, qua littera vis hominis exprimitur, dum iam celeritate altitudini v debita progreditur, eiusmodi eſſe functio ipſius v, vt poſito $v = 0$ fiat $p = g$; ſin autem ponatur $v = h$, vt ſit $p = 0$; his autem conditionibus ſatisfacit formula $p = g - \frac{gv}{h}$.

§. 10. Subſtituamus ergo hanc formulam $p = g - \frac{gv}{h}$ in aequatione differentiali $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$, habebimusque $dz = \frac{h(P+Q)dv}{gh - gv - hF}$; et integrando $z = \frac{h}{g}(P+Q)\, l \frac{h(g-F)}{h(g-F)-gv}$. Perſpicuum autem eſt motum oneris accelerari, quamdiu fuerit $gh - gv - hF > 0$: ſimul ac vero fiat $v = \frac{h(g-F)}{g}$,

accele

accelerationem ceſſare, motumque fore vniformem: quem quidem elapſo demum tempore infinito aſſequetur. Verum tamen mox ab initio iam tam prope hunc gradum velocitatis acquiret, vt motus ſtatim appareat vniformis: quod etiam experientia ita confirmat, vt acceleratione initiali penitus neglecta totus motus ex hoc gradu velocitatis aeſtimari ſoleat. Onus ergo promouebitur vniformiter celeritate, quae oriatur lapſu ex altitudine $v = \frac{h(g-F)}{g}$: ſeu ex poſita altitudine h in partibus milleſimis pedis Rhenani, ſingulis minutis ſecundis tot pedes abſoluentur, quot vnitates erunt in formula $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{g-F}{g}}, h$.

§. 11. Seu cum h ſit altitudo debita celeritati, quam homo libero curſu aſſequi valeat, $\frac{1}{4} \sqrt{h}$ exprimet ſpatium in pedibus, quod homo hoc curſu ſingulis minutis ſecundis emetiri valeat. Quodſi ergo ponamus hominem ſummo hoc velocitatis gradu, ſingulis minutis ſecundis n pedes abſoluere, idem homo onus Q protrahens ſingulis minutis ſecundis conficiet ſpatium $n \sqrt{(1 - \frac{F}{g})}$ pedes. Si duo homines coniunctim trahant, littera n quidem eadem manebit, ſed eorum vis, dum quieſcunt, erit dupla, ſicque celeritas oneris erit $= n \sqrt{(1 - \frac{F}{2g})}$ ped. in minuto ſecundo. Atque ſi numerus hominum, qui viribus aequalibus polleant, fuerit $= m$, celeritas oneri impreſſa erit $= n \sqrt{(1 - \frac{F}{mg})}$ ped. in minuto ſecundo. Haec eadem ſunt tenenda, ſi onus ab equis aliisue animalibus protrahatur, dummodo pro quouis animalium genere debiti valores pro litteris g et n aſſumatur.

§. 12. Dum igitur ad hunc ſummum atque vltimum celeritatis gradum attendimus, quo onus a datis viribus humanis ſeu animalibus promoueri queat; inertia oneris

oneris Q non amplius in calculum ingreditur, ſed tantum frictionis F ratio eſt habenda; quae igitur quo fuerit minor, eo maiori celeritate onus promouebitur: atque ſi penitus tolli poſſet, tum onus non impediret, quominus homines ea ipſa celeritate progrediantur, ac ſi ab onere eſſent ſoluti. Frictione autem reluctante, iſte celeritatis gradus oneri induci nequit, niſi hominum numerus in infinitum augeatur. Quo autem onus data quadam celeritate protrahatur, numerum hominum *m* frictioni F proportionalem eſſe oportet; vnde patet, ſi frictio reddatur duplo minor, dimidio tantum hominum numero opus eſſe, et ſi frictio centuplo minor effici poſſet, centeſimam virium partem eidem motui producendo ſufficere. Quae circumſtantia in vectione onerum, plauſtrorum et tormentorum maxime attendi meretur.

§. 13. Quo vſus huius formulae clarius percipiatur, eam exemplis illuſtremus. Si igitur onus ab hominibus promoveatur, pro littera *g* accipiendum eſt pondus, quod homo pauimento firmo inſiſtens ſuſtinere valet; quando ſcilicet pondus verticaliter ſuſpenſum ope funiculi ſuper trochleam in directionem horizontalem reducti ſecundum hanc directionem trahendo continet. Vis enim hominis menſurari debet pondere, quod tanta vi deorſum tendat, quantam homo ſecundum directionem horizontalem exerit. Difficile autem eſt pro *g* determinatum valorem aſſignare, cum homo modo fortius modo remiſſius trahat, eiusque vis plurimum a pauimento, cui inſiſtit, pendeat; tum vero etiam actionem non fortiorem aſſumi conuenit, quam vt homo eam per aliquod tempus exerere valeat. His perpenſis pro vi *g* maius pondus non videtur aſſumi poſſe quam 70 librarum circiter. Deinde ſi homo ab omni

omni onere ſolutus currit, ſingulis minutis ſecundis fere 6 pedes conficiet. Quam ob rem in exemplis calculo ſubiiciendis aſſumere licebit $g = 70$ libr. et $n = 6$ ped. Frictionem autem oneris Q, niſi imminuatur per ſingularem Machinae ſtructuram, tertiae parti totius ponderis aequalem aſſumamus.

§. 14. Si igitur onus Q ab vno homine horizontaliter promoueri debeat, erit $m = 1$, et $F = \frac{1}{3}Q$, vnde celeritas, qua hoc onus promouebitur, erit $= 6\sqrt{(1 - \frac{F}{70})}$ $= 6\sqrt{(1 - \frac{G}{210})}$ pedum in minuto ſecundo Si ergo onus G fuerit vel 210 ℔, vel maius prorſus non de loco mouebitur: ſin autem ſit minus, ab vno homine protrahi poterit. Celeritates autem per ſpatia in minuto ſecundo confecta expreſſae erunt. Vt haec tabella indicat.

Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus	Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus
0	6, 00	110	4, 14
10	5, 86	120	3, 93
20	5, 76	130	3, 70
30	5, 55	140	3, 46
40	5, 40	150	3, 21
50	5, 24	160	2, 93
60	5, 07	170	2, 62
70	4, 90	180	2, 27
80	4, 72	190	1, 85
90	4, 54	200	1, 31
100	4, 34	210	0, 00

§. 15. Quanquam haec tabula ad vim vnius hominis eſt accommodata, tamen ex ea quoque inueniri poteſt celeritas oneris, ſi plures homines ſimul trahant. Cum

 enim

enim eadem prodeat celeritas, ſi pondus oneris ad numerum hominum eandem habeat rationem; manifeſtum eſt, onus 1000 ℔ a 10 hominibus eadem velocitate promotum iri, qua onus 100 ℔ ab vno homine: haec autem celeritas in tabula eſt $4\frac{1}{3}$ pedum in minuto ſecundo. Sic ſi onus 2375 ℔ a 14 hominibus protrahatur, numerum 2375 diuido per 14, et quotum $169\frac{9}{14}$, ſeu 170 proxime quaero in tabella; cui reſpondebit celeritas oneris, quae erit 2, 62 pedum ſingulis minutis ſecundis. Sin autem frictio maior minorue fuerit tertia parte oneris, tum in calculo hoc onus in eadem ratione vel augeatur vel diminuatur; ſicque denuo vera eius celeritas reperietur. Ita ſi onus 1200 ℔, cuius frictio tantum quintae parti 240 ℔ aequetur, ab 8 hominibus protrahatur, loco 1200 aſſumo eius tres quantas 720, quem numerum per 8 diuido, et quotus 90 dabit celeritatem 4, 54 pedum.

§. 16. Hinc porro etiam ſolui poteſt Problema, quo quaeritur, quot hominibus opus ſit ad onus data celeritate promouendum. Sit enim onus $=$ Q librarum, cuius frictio ſiue tertiae ſiue alii parti aequetur, ponatur $=$ F librarum. Celeritas vero, quae poſtulatur, ſit k pedum in minuto ſecundo; ponatur numerus hominum ad hoc praeſtandum requiſitorum $= m$, atque eſſe oportebit $6\sqrt{(1-\frac{F}{70m})} = k$. Fiet ergo $36-\frac{36F}{70m} = kk$, ideoque $m = \frac{18F}{35(36-kk)}$, ſeu quia in his menſurae accuratae non dantur, proxime ſaltem $m = \frac{\frac{1}{2}F}{36-kk}$. Quod ſi ergo requiratur celeritas, qua 3 pedes ſingulis minutis ſecundis abſoluantur, fiet

$k = 3$,

$k = 3$, et numerus hominum erit $m = \frac{\frac{1}{2}F}{27} = \frac{F}{54}$ ſeu ex priori formula $m = \frac{2F}{135}$. Ita ſi onus 1000 ℔, cuius frictio ſit 250 ℔ celeritate trium pedum in 1″ ſit protrahendum, numerus hominum erit $= \frac{500}{135}$, ideoque quia fractiones reiici oportet, opus erit quinque hominibus.

§. 17. Si loco hominum equis vtendum ſit ad onera protrahenda, valores litterarum n et g experientiae conuenienter definiri debebunt; quorum vterque maior erit quam pro hominibus, cum equi non ſolum longe maioribus viribus valeant, ſed etiam celeriorem curſum habeant. Si igitur vis equi quadruplo maior ſtatuatur, quam hominis, erit $g = 280$ ℔, et pro ſpatio n, quod vno minuto ſecundo libero curſum conficitur, fere 10 vel 12 pedes aſſumere licebit. Vnde ſi oneris frictio ſit $= F$ librarum, id ab m equis tanta celeritate protrahetur, vt ſingulis minutis abſoluatur ſpatium $10 \dot{V} (1 - \frac{F}{280m})$ pedum. Pro bobus autem loco equorum adhibitis, vis fortaſſe g erit minor, at celeritas n certe multo deficiet, cum boui vix maior celeritas quam homini tribui queat. In hoc autem negotio experientia imprimis erit conſulenda, atque pro quouis virium genere litterae n et g per experimenta definiri debebunt: quod facile fiet, ſi formulae generales cum experimentis conferantur.

§. 18. In hoc ergo praecipuum ſpectatur diſcrimen inter vires animales et eas, quae a grauitate petuntur, quod hae continuo aequaliter vrgeant, ſiue ipſae ſint in motu conſtitutae, etiam nunc quieſcant; cum illae

eo magis diminuantur, quo celerius iam ipſae mouentur, atque determinantum celeritatis gradum transgredi nequeant. Hic autem ipſe modus, quo animalia vires ſuas exercent, potiſſimum eſt ſpectandus, ſiue agant trahendo, ſiue trudendo, ſiue nitendo, ſiue calcando, ſiue alio denique modo; vnde tam valor vis abſolutae g, qua, dum in quiete perſiſtunt, pollent, plurimum variatur quam maximus celeritatis gradus, quem, cum omnino onus auferatur, omnibus viribus adhibitis adipiſci valent. Multa deinde alia dantur virium genera, veluti venti, aquae fluentis, ignis etc. quae autem ſine accurata plurium Machinarum cognitione definiri nequeunt; quam ob rem donec eousque progredi liceat, haec duo tantum virium genera ab animalibus et grauitate profecta in calculum inducam.

§. 19. Praeter motum autem ipſius oneris, quo cuiusuis Machinae ope promouetur, plurimum intereſt noſſe vires, quas durante motu ſingulae Machinae partes ſuſtinent, atque in ſe inuicem exerunt. In propoſita igitur Machina, quoniam tractio ope funis fieri ſolet, ponamus primo funem Ff eſſe breuiſſimum, vt eius pondus nullius ſit momenti, inueſtigemusque vim, qua iſte funis Ff quouis motus momento extenditur. Poſitis ergo maſſa oneris, vt ſupra $= Q$, frictione $= F$, vi protrahente $= p$, eius inertia $= P$; atque celeritate, quam confecto ſpatio $= z$ iam acquiſiuit, debita altitudini $= v$ ſit hoc momento tenſio funis $Ff = t$: quae cum vi ſollicitanti p ſit contraria, ſi ſola inertia huius vis ſpectetur, ea perinde mouebitur, ac ſi protraheretur vi $= p$, retro autem vrgeretur vi $= t$, vnde fiet $d\,v = \frac{(p-t)\,dz}{P}$.

Onus

Onus autem, in quod immediate ſola vis t agit, dabit hanc aequationem $dv = \frac{(t - F)dz}{Q}$: ſupra autem inuenimus $dv = \frac{(p - F)dz}{P + Q}$.

§. 20. Ex his ergo aequationibus elicitur tenſio funis $t = F + \frac{Q(p - F)}{P + Q} = \frac{pQ + FP}{P + Q}$: niſi ergo funis hanc tenſionem ſuſtinere poſſit, quin rumpatur, motus produci non poterit. Apparet autem, ſi vis p ſit vniformis ſeu a pondere petita, funem perpetuo eandem tenſionem ſuſtinere. Sin autem vis p ſit animalis, quae creſcente motu imminuatur: quo caſu motus mox ad vniformitatem reducetur, fietque $p = F$. Hoc ergo caſu tenſio funis $t = \frac{FQ + FP}{P + Q} = F$ ipſi frictioni aequalis erit: initio autem motus, quo vis p frictionem ſuperare debuit, tenſio funis quoque maior fuerit neceſſe eſt: vnde intelligi poteſt, quanta vi funem praeditum eſſe oporteat, vt ne rumpatur; maximumque rumpendi periculum in ipſum motus initium incidere.

§. 21. Tenſio igitur funis antequam motus ad vniformitatem reducitur, perinde ac velocitas oneris pendet quoque ab inertia vis vrgentis, quam vocauimus $= P$: quae ſi eſſet nulla tenſio foret perpetuo ipſi vi ſollicitanti p aequalis. Sin autem inertia haec P, qua ſi eſſet infinita; prodiret $t = F$, ſicque tenſio ipſi frictioni conſtanter eſſet aequalis. Cum igitur ſub initium vis ſollicitans p maior eſſe debeat frictione F, priori caſu $P = 0$, tenſio continuo decreſcet, quoad motus fiat vniformis: ipſo autem motus initio erat $= p$. Quare ſi inertia vis ſollicitantis neque nulla fuerit neque infinita, tenſio quidem ab initio minor erit quam p, maior tamen quam frictio F; quip-

pe cui tum demum aequalis fiet, cum motus euaſerit vniformis. Ceterum in viribus animalium inertia proxime erit ponderi animalis aequalis, ſi quidem eorum tota corpora ad parem motum incitari debent. Parum autem intereſt noſſe, quanta haec inertia exacte ſit aeſtimanda, cum in motu vniformi, ad quem potiſſimum reſpi-reſpicitur, eius cognitione non ſit opus.

§. 22. Si funis Fp, cuius ope onus Q a vi p protrahitur, fuerit tam longus, vt eius inertiae quoque habenda ſit ratio, tenſio in ſingulis eius punctis non erit aequalis. Maximam quidem inaequalitatem producet incuruatio funis a grauitate oriunda, ſed quia haec in Staticis definiri ſolet, hic tantum ad inaequalitatem ab actione ortam attendam. Inueſtigabo ergo tenſionem in quacunque funis particula mn, quam ponam $= t$, ſit maſſa portionis anterioris $np = M$, et maſſa poſterioris $mF = N$; quarum illa ad potentiae inertiam, haec vero ad onus Q referri debebit. Cum igitur maſſa $P + M$ protrahatur a vi $p - t$, erit $dv = \frac{(p-t)dz}{P+M}$: maſſa autem $Q + N$ a vi $t - F$, erit $dv = \frac{(t-F)dz}{Q+N}$, et coniunctim $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q+M+N}$ exiſtente $M + N$ pondere totius funis, quod ſit $= L$. Hinc ergo erit $t = F + \frac{(Q+N)(p-F)}{P+Q+L}$ $= \frac{(Q+N)p+(P+M)F}{P+Q+L}$. Atque ſi motus fiat vniformis, ſeu $p = F$, tenſio denuo fiet $t = F$, vnde hoc caſu vbique erit eadem, ſin autem $p > F$, tenſio funis a p ad F recedendo continuo decreſcet.

Fig. 3. §. 23. His de motu oneris horizontali expeditis ponamus onus Q verticaliter ſurſum eleuari debere, ope funis EM, qui trochleae T ſit circumplicatus, vt vis ſolli-

lici-

licitans ſecundum directionem horizontalem N P trahens concipi queat, ſi quidem fuerit vis animalis: ſin autem grauitate ponderis, vti velimus, in P denuo trochleam ſtatui conueniet, cui funis quoque circumductus deorſum trahatur. Hic autem nullam motus perturbationem ab his trochleis oriundam in calculum introducamus: ſed trochleas tanquam immobiles conſideremus, ſuper quibus funis liberrime ſine frictione hinc inde protrahi queat. Re vera autem motus oneris non mediocriter tam a productione motus in ipſis trochleis, quam a frictione perturbari debet: quem effectum ſingulari capite inueſtigare conſtitui. Hic itaque cum onus nulli corpori incumbat, nulla quoque aderit frictio. Sit igitur maſſa oneris $= Q$, vis motui renitens ſeu eius pondus $= q$, vt ſit $Q = q$; tum vero vis in P vrgens $= p$, eiusque inertia $= P$. Confecerit iam tam onus quam potentia ſpatium $= z$, et ſit vtriusque celeritas debita altitudini $= v$, erit $(P + Q)\, dv = (p - q)\, dz$, ſi quidem ponderis funis eiusque inertiae nulla ratio habeatur.

§. 24. Si igitur vis ſollicitans p fuerit conſtans, vti euenit, ſi onus Q ab alio pondere grauiore deſcendente eleuetur, erit vtique $v = \frac{(p-q)z}{P+Q}$. Neceſſe ergo eſt, vt ſit $p > q$, ſeu vis eleuans maior pondere oneris: ſi enim eſſet $p = q$, onus in aequilibrio ſuſtineretur, ſin autem eſſet $p < q$ onus delaberetur, vimque trahentem p ſecum abriperet. Verum ſi $p > q$ onus eleuabitur motu vniformiter accelerato, eiusque celeritas continuo augebitur, niſi quatenus reſiſtentia aeris obſiſtit. In quo vis ergo ſpatii, per quod onus eleuatur, puncto eius celeritas aſſignari poteſt; vnde ſi tempus dicatur $= t$, erit $dt = \frac{dz}{\sqrt{v}}$

$= \frac{dz}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}$, hincque ipſum tempus $t = 2\sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}z$: ſeu ſi ſpatium z in ſcrupulis pedis Rhenani exprimatur, tempus t in numero minutorum ſecundorum reperietur $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{P+Q}{p-q}} z$. Vnde viciſſim ſi tempus t in minutis ſecundis exprimatur, erit ſpatium interea abſolutum $= 15625\, tt. \frac{p-q}{P+Q}$ ſcrup. ped. Rhenani.

§. 25. Si vis ſollicitans p ſit humana ſeu animalis, quae in motus initio ſit $= g$, cum autem celeritate altitudini h debita iam progrediatur, penitus euaneſcat, vt ſit, quem ad modum ſupra aſſumſimus, $p = g - \frac{gv}{h}$: habebimus hanc aequationem differentialem $(P + Q)\, dv = (g - q - \frac{gv}{h})\, dz$, ſeu $\frac{g\,dv}{gh - hq - gv} = \frac{g\,dz}{h(P+Q)}$, cuius integrale eſt $\frac{gz}{h(P+Q)} = l \frac{h(g-q)}{gh - hq - gv}$; ſi quidem celeritas oneris in motus initio euaneſcens aſſumatur. Hoc ergo caſu celeritas oneris mox ad vniformitatem reducetur, atque acceleratio ceſſabit, quando fiet $v = \frac{h(g-q)}{g}$. Neceſſe ergo eſt, vt vis abſoluta g ſuperet reniſum oneris q, tum vero haec celeritas conſtans $\sqrt{v}$ more ſolito exhiberi poterit, ita vt ſpatium, quod ſingulis minutis ſecundis abſoluitur, in pedibus exprimatur. Ad huncque vſum tabulae ante traditae accommodari poterunt, cum enim ſupra ob frictionem tantum tertia pars oneris Q reniti ſit aſſumta, hic totum onus reluctari eſt ponendum; ideoque ſi magnitudo oneris in ſuperioribus tabulis exhibita triplo minor aſſumatur, eae tabulae ad vſum praeſentem transferentur. Sic patebit onus 240 ℔ ab octo hominibus ſingulis minutis ſecundis per altitudinem 4, 54 pedum eleuari, poſtquam quidem motus iam ad vniformitatem fuerit compoſitus.

§. 26.

§. 26. Si onus $a\,b\,c\,d$ ſuper plano inclinato A C Fig. 4. ſurſum trahi debeat, ope vis, cuius directio E M ſit ipſi plano A C parallela; ſeu ſi oneri applicatus ſit in E funis, qui trochleae in T fixae circumductus a data vi ſecundum directionem N P protrahatur, ita vt portio funis E M ipſi plano A C maneat parallelus. Ponamus angulum C A B, quem planum inclinatum A C cum horizonte A B facit $= \Phi$, pondus oneris eiusue maſſam $= Q$, atque onus vrgebitur deorſum ſecundum directionem verticalem Q V per eius centrum grauitatis Q tranſeuntem vi $= Q$, quae reſoluatur ſecundum directiones Q R et Q S, quarum illa ſit ad planum inclinatum normalis, haec vero eidem parallela. Poſito ergo ſinu toto $= 1$, erit ob angulum $V Q R = B A C = \Phi$, vis $Q R = Q \operatorname{coſ.} \Phi$, et vis $Q S = Q \operatorname{ſin.} \Phi$: quae poſterior tota motui reluctatur. Prior vero vis $Q \operatorname{coſ.} \Phi$ apprimit onus ad planum inclinatum, vnde naſcitur frictio F, dum onus mouetur; quae ſi trienti vis apprimentis ſit aequalis, erit $F = \frac{1}{3} Q \operatorname{coſ.} \Phi$. Generatim autem ponamus frictionem $F = \frac{1}{\nu} Q \operatorname{coſ.} \Phi$, ita vt dum onus promouetur, tota vis motui renitens ſit $= Q \operatorname{ſin.} \Phi + \frac{1}{\nu} Q \operatorname{coſ.} \Phi$.

§. 27. Si igitur planum A C eſſet horizontale, ſeu $\Phi = 0$, tota vis oneris motui renitens foret $= \frac{1}{\nu} Q$, ſeu ſola frictione conſtaret: ſin autem planum A C verticaliter erigatur, vt angulus Φ fiat rectus, frictio euaneſcet, et onus ſolo ſuo pondere motui renitetur. In reliquis autem plani A C inclinationibus tam ob pondus quam ob frictionem onus motui reluctabitur, et dabitur quidem eiusmodi plani inclinatio, ex qua oritur maxima reluctatio, ita vt onus ſuper eo difficilius eleuetur, quam ſi vertica-

 liter

liter eleuari deberet Quae inclinatio inuenietur, ſi differentiale formulae Q ſin. $\Phi + \frac{1}{v}$ coſ. Φ ponatur $= 0$, vnde ſit tang. $\Phi = v$: vnde ſi $v = 3$, angulus B A C fiet circiter $= 71^\circ, 34'$, et ſuper huiusmodi plano A C onus omnium difficillime eleuabitur. Vis enim renitens ob tang. $\Phi = 3$, hincque ſin. $\Phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et coſ. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, erit $= \frac{4}{\sqrt{10}} Q$, cum in ſitu plani verticali ſit tantum $= Q$. Dabitur ergo quoque eiusmodi plani inclinatio, in qua onus motui aeque renitetur, ac ſi verticaliter eſſet eleuandum, quod euenit, ſi Q ſin. $\Phi + \frac{1}{v} Q$ coſ. $\Phi = Q$, hoc eſt, ſi ſin. $\Phi = 1 - \frac{1}{v}$ coſ. Φ, vnde ſit coſ. $\Phi = \frac{2v}{1 + vv}$ et ſin. $\Phi = \frac{vv - 1}{vv + 1}$. Si $v = 3$, erit iſte angulus $= 53^\circ, 8'$.

§. 28. Quodſi iam vis ponatur $= p$ eiusque inertia $= P$; celeritas oneri iam debita ſit altitudini v, atque dum promotio fit per ſpatiolum $Pp = dz$, erit per regulas motus $dv = (p - Q \text{ ſin. } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ coſ. } \Phi)\, dz : (P + Q)$, vnde patet, motum denuo fore vniformiter acceleratum, ſi quidem vis ſollicitans fuerit eiusmodi, vt aequaliter vrgere pergat, ſiue tarduis moueatur ſiue celerius. Perſpicuum eſt igitur, quo oneri motus imprimatur, neceſſario vim ſollicitantem p ſuperare debere vim renitentem Q ſin. $\Phi + \frac{1}{v} Q$ coſ. Φ. Sin autem in creſcente motu ipſa vis trahens remittatur, vt fit in viribus hominum et animalium; vtendum erit pro p valore ſupra aſſignato $g - \frac{gv}{b}$; fietque $dv = (g - \frac{gv}{b} - Q \text{ ſin } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ coſ } \Phi)\, dz : (P + Q)$. Hoc ergo caſu motus ad aequabilitatem conuerget, cuius celeritas definietur hac aequatione $v = b - \frac{bQ}{g} (\text{ſin. } \Phi + \frac{1}{v} \text{coſ. } \Phi)$. Ceterum hic tam inertiam funis, quam effectum ex trochlea oriundum neglEximus, quippe qui peculiarem inueſtigationem requirit.

§. 29.

§. 29. Conſideremus deſcenſum oneris ſuper plano in- Fig. 5.
clinato tam ſpontaneum, quam a vi ſecundum directionem Q P ipſi plano C A parallelam vrgente productum. Tranſeat autem huius vis directio Q P per ipſum oneris centrum grauitatis Q, et baſis oneris *a b*, qua plano incumbit, tam ſit larga, vt onus voluendo prolabi nequeat. Sit igitur angulus $A = \Phi$, quem planum C A cum horizonte B A conſtituit, et vocetur maſſa oneris, eiusue pondus $= Q$; cuiusuis directio Q V cum ſit verticalis, reſoluatur ſecundum directiones Q P, ipſi plano C A parallelam, et Q R ad planum perpendicularem, atque ob angulum $V Q R = A = \Phi$, erit vis $Q P = Q \text{ſin.} \Phi$ et vis $Q R = Q \text{coſ.} \Phi$. Illa ergo vis $Q P = Q \text{ſin.} \Phi$ motui non ſolum non reluctatur, ſed etiam ipſam vim protrahentem, ſi quae adeſt, adiuuabit, ad motum accelerandum. Altera vero vis $Q R = Q \text{coſ.} \Phi$ oneri ad planum apprimendo impenditur, ab eaque frictio originem habebit. Scilicet ſi frictio aequetur trienti vis apprimentis, erit hic frictio $= \frac{1}{3} Q \text{coſ.} \Phi$. Quo autem inueſtigatio latius pateat, ponamus, frictionem eſſe $= \frac{1}{v} Q \text{coſ.} \Phi$: quae hoc caſu ſola motui renitetur.

§. 30. Sit iam *p* vis ſollicitans, qua onus praeter vim propriam $Q P = Q \text{ſin.} \Phi$ ſecundum directionem Q P protrahatur: haecque vis coniuncta ſit cum inertia $= P$. Tota ergo vis onus promouens erit $= p + Q \text{ſin.} \Phi$: et quia ſola frictio motui reluctatur, onus accelerabitur ab exceſſu iſtius vis ſupra frictionem $p + Q \text{ſin.} \Phi - \frac{1}{v} Q \text{coſ.} \Phi$. Quo igitur motus oriatur, neceſſe eſt, vt ſit $p + Q \text{ſin.} \Phi > \frac{1}{v} Q \text{coſ.} \Phi$, quamdiu enim fuerit $p + Q \text{ſin.} \Phi < \frac{1}{v} Q \text{coſ.} \Phi$, onus in quiete perſeuerabit. Quodſi ergo onus a

nulla vi externa p ſollicitetur, ſed ſolo ſuo pondere adt motum nitatur, nullus motus ſubſequetur, quamdiu fuerit Q ſin. $\Phi < \frac{1}{v}$ Q coſ. Φ ſeu tang. $\Phi < \frac{1}{v}$; ſtatim vero atque angulus Φ tantum augeatur, vt fiat tang. $\Phi > \frac{1}{v}$ onus deſcendet. Ex quo tutiſſimus ac facillimus modus obtinetur quantitatem frictionis explorandi. Onere enim quocunque huiusmodi plano impoſito, eius inclinatio ſeu angulus A $= \Phi$ pedetentim augeatur, donec onus ſuper eo deſcendere incipiat, ſicque innoteſcet anguli Φ magnitudo, cuius tangens ſit $= \frac{1}{v}$; hincque porro valor fractionis $\frac{1}{v}$, per quam frictio determinatur. Ita ſi iſte eleuationis angulus A deprehendatur $= 18°$, erit $\frac{1}{v} = 0,3249$ ſeu proxime $\frac{1}{v} = \frac{13}{40}$. Hoc ergo modo pro omnis generis corporibus quantitas frictionis explorari poterit. Atque ſi frictio aequetur tertiae parti vis apprimentis, onus ſuper plano inclinato quieſcere perget, quoad angulus inclinationis B A C non excedat $18°, 26'$.

§. 31. Vt autem ipſum motum oneris definiamus, qui oritur, quando $p +$ Q ſin. $\Phi > \frac{1}{v}$ Q coſ. Φ, ponamus onus iam confeciſſe ſpatium $= z$, eiusque celeritatem nunc eſſe debitam altitudini $= v$. Quoniam vis accelerans eſt $= p +$ Q ſin. $\Phi - \frac{1}{v}$ Q coſ. Φ, et maſſa mouenda $=$ P + Q, erit $(P + Q)\, dv = (p + Q \text{ ſin. } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ coſ. } \Phi)\, dz$: atque ſi vis p in motu non diminuatur, ſed perpetuo conſtans maneat, erit quoque $(P+Q)v = (p + Q\text{ſin.}\Phi - \frac{1}{v}Q\text{coſ.}\Phi)z$, quae aequatio indicat, motum fore vniformiter acceleratum. Sin autem vis p in motu remittatur, ſeu ad genus virium animalium pertineat, vt ſit $p = g - \frac{gv}{h}$, erit $(P + Q)\, dv = (g - \frac{gv}{h} + Q \text{ ſin. } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ coſ. } \Phi)\, dz$. Hoc ergo caſu motus ad vniformitatem conuerget, cuius celeri-

celeritas debita ſit altitudini $v = b + \frac{bQ}{g}(\text{ſin.}\,\Phi - \frac{1}{v}\text{coſ.}\,\Phi)$, ſi quidem fuerit $\text{ſin.}\,\Phi < \frac{1}{v}\text{coſ.}\,\Phi$ ſeu $\text{tang.}\,\Phi < \frac{1}{v}$. Si enim angulus Φ maior fuerit, vt frictio a ſola grauitate oneris ſuperetur, tum etiamſi nulla vis p adeſſet, motus oneris in infinitum accelараretur. Atque hoc caſu vis p tamdiu tantum aget, quoad fiat $v = b$; ac deinceps onus a ſola grauitate accelerabitur, niſi forte vis p motui celeriori, a quo ipſa abripiatur, reluctetur; hocque caſu fiat negatiua. Quod ſi eueniat, visque p negatiuum valorem induat, quando $v > b$; tum acceleratio oneris a propria grauitate orta coercebitur, atque motus ad vniformitatem reducetur celeritate debita altitudini $v = b + \frac{bQ}{g}(\text{ſin.}\,\Phi - \frac{1}{v}\text{coſ.}\,\Phi)$. Hoc ergo caſu prorſus contrarium accidit, atque in praecedente: dum hic vis, quae corpus initio accelerabat, deinceps in vim retardantem abit, atque effectum grauitatis reprimere debet.

DE MOTV TAVTOCHRONO PENDVLORVM COMPOSITORVM.

AVCTORE
L. EULERO.

§. 1.

Etſi Theoria motus pendulorum, quae a Viro ſummo *Hugenio* primum feliciſſime eſt expoſita, Mechanicam ampliſſimis atque vtiliſſimis inuentis locupletauit, tamen iam ſatis conſtat, modum, quo motum pendulorum in horologiis ope cycloidis ad vniformitatem reuocare eſt conatus, in praxi ad ſcopum non prorſus eſſe accommodatum. Quod quidem nullo Theoriae vitio vſu venit, quae firmiſſimis nititur fundamentis, neque ipſi Geometriae ratione certitudinis quicquam cedit: ſed cum pendula, quae ad motum horologiorum moderandum, adhiberi ſolent, multum diſcrepent ab iis, quorum motus ope cycloidis in Theoria ad aequabilitatem reduci docetur; mirum non eſt, Theoriam praxi non perfecte reſpondere, atque in pendulis horologiorum inaequalitatem quamdam relinqui, etiamſi in Theoria perfectus Tautochronismus habeatur.

§. 2. Demonſtrauit autem *Huienius*, ſi corpus pendulum ita ſuſpendatur, vt eius motus peragatur in cycloide vulgari baſin horizontalem habente, tum omnes eius oſcillationes, ſiue fuerint ampliores ſiue contractiores, aequalibus temporibus abſolui. Verum tamen conditiones,

ſub

ſub quibus iſte tautochronismus locum habet, probe ſunt notandae, ne huic propoſitioni in ſe veriſſimae plus tribuatur, quam demonſtrationis vis euincit. Primum igitur neceſſe eſt, vt motus fiat in medio non reſiſtente, ſeu in ſpatio ab omni materia vacuo: deinde non minus requiritur, vt pendulum ſit ſimplex, ſeu vt tota penduli maſſa in vno quaſi puncto collecta exiſtat: cuiusmodi pendulum ſatis exacte exhibetur, ſi globulus minimus ſimulque grauiſſimus ope fili tenuiſſimi et leuiſſimi, cuius pondus prae grauitate globuli euaneſcat, ſuſpendatur.

§. 3. Niſi igitur tam medii reſiſtentia, in quo motus peragitur, fuerit nulla, quam maſſa ipſius penduli quaſi infinite parua, vti in Theoria aſſumitur, oſcillationes etiamſi in cycloide abſoluantur, tamen non erunt iſochronae. Quare cum in vſu horologiorum neque aeris reſiſtentia tolli queat, neque eiusmodi pendula adhiberi poſſint, quae pro ſimplicibus haberi liceat, ob hanc duplicem cauſam ſatis perſpicuum eſt, hoc caſu eam cycloidis proprietatem, quae tantum pro pendulis ſimplicibus in ſpatio vacuo eſt demonſtrata, locum non amplius inuenire: neque ideo huiusmodi pendulorum oſcillationes fore iſochronas. Hunc etiam defectum ipſa experientia non obſcure indicaſſe videtur, cum artifices vſum cycloidis ad motus horologiorum moderandos nunc fere penitus repudiauerint.

§. 4. Quod quidem ad difficultatem a medii reſiſtentia oriundam attinet, quoniam ea ob aeris raritatem valde eſt parua, ea ſine notabili errore negligi poſſet. Interim tamen Geometrae in ea ſuperanda multo magis elaborauerunt, quam in altera, quae tamen vti mox

ſum

ſum oſtenſurus, motui multo maiorem inaequalitatem inducit. *Neutonus* enim demonſtrauit, ſi medii, in quo pendulum ſimplex agitatur, reſiſtentia ipſis celeritatibus ſit proportionalis, cycloidem non ſecus atque in ſpatio vacuo eſſe ſatisfacturam. Cum autem reſiſtentia aeris non celeritatum rationem ſimplicem, ſed duplicatam ſequatur, hic cycloidis vſus ceſſat, eiusque loco ad tautochronismum obtinendum aliam curuam ſubſtitui oportet, quam ego primus elicui atque in *Comment. Acad. Petrop. Tom.* expoſui. Requirit ea autem, perinde ac cyclois *Hugeniana* pendulum ſimplex, neque pro pendulis compoſitis vllum vſum praeſtat.

§. 5. Si igitur motui pendulorum, quibus horologia inſtrui ſolent, iſochronismum inducere velimus, potiſſimum ad pendula compoſita erit reſpiciendum, quorum maſſa non in vno quodam puncto collecta, ſed per totum penduli volumen, vti re vera eſt, diſperſa concipiatur. Vnde ſequens naſcitur quaeſtio, *vt propoſito pendulo quocunque compoſito, ea linea curua determinetur, in qua, ſi hoc pendulum moueatur, omnes eius oſcillationes futurae ſint aequidiurnae, ſeu aequalibus temporibus abſoluantur.* Atque in hac inueſtigatione mentem facile ab aeris reſiſtentia abſtrahere poterimus, tum quod calculus fieret maxime intricatus et inſuperabilis, tum vero imprimis quod reſiſtentia tam ſit exigua, vt ſine ſenſibili errore negligi queat. A ſolutione autem huius Problematis tota horologiorum perfectio, quae quidem ex hoc genere expectari poteſt, pendet.

§. 6. Motum quidem penduli cuiusuis compoſiti *Hugenius* ad motum penduli ſimplicis reducere docuit, dum

dum demonſtrauit omne pendulum compoſitum perinde oſcillari, ac ſi tota eius maſſa in certo quodam puncto, quod centrum oſcillationis vocat, eſſet collecta. Hinc pendulum compoſitum pari modo oſcillationes ſuas abſoluet, quo pendulum ſimplex, cuius longitudo aequetur diſtantiae centri oſcillationis ab axe: ſic igitur determinatio motus cuiusque penduli compoſiti ad inuentionem centri oſcillationis perducitur, pro quo negotio *Hugenius* elegantem tradidit regulam, variis paſſim modis demonſtratam. Primum autem animaduertendum eſt, hanc regulam tantum ad corpora rigida et inflexibilia patere, cuiusmodi quidem corpora vulgo ad pendula adhiberi ſolent. Deinde autem porro haec centri oſcillationis inuentio tantum ad motum pendulorum circularem extenditur, quo pendulum circa axem fixum libere gyratur, eiusque ſingula puncta circulos deſcribunt,

§. 7. Cum autem motus penduli circularis ad tautochronismum producendum ſit ineptus, dum ampliores oſcillationes tardius abſoluuntur, quam minores; hic nobis motus penduli in alia quacunque linea curua erit euoluendus. Poteſt vero pendulum ad curuam quamcunque deſcribendam accommodari, ſi loco axis fixi, circa quem vulgo pendulum oſcillatur, linea curua, quae illius curuae deſcribendae ſit euoluta; ſubſtituatur; ſimili modo, quo *Hugenius* docuit, pendulum intra duas cycloides ſuſpendere, vt ab eo cyclois deſcriberetur. In hunc finem ſuperiorem penduli portionem flexibilem eſſe oportet, qua iſti curuae applicatur, vt reliqua portio perpetuo ſecundum tangentem huius curuae extendatur, ſicque nouam

curuam ex eius euolutione natam deſcribat. Quo motu in genere expedito, eam curuam inueſtigari oportebit, ad quam pendulum inſtructum omnes oſcillationes aequalibus temporibus abſoluat.

Fig. 6. §. 8. Si igitur pendulum quodcunque in puncto A ſit ſuſpenſum, ſit curua A M B eius directrix, quam ſuperiori parte flexibili A M ita contactu complectatur, vt pars inferior M G, dum mouetur, ab vltimo contactus puncto M continuo in directum porrigatur. Primum ergo manifeſtum eſt, hanc tangentem M G per corporis centrum grauitatis G eſſe tranſituram, eo quod media vis centrifugae directio, qua pendulum praeter grauitatem tenditur, per punctum hoc G tranſit. Deinde cum corpus hoc mouetur, punctum G deſcribet curuam G C, cuius euoluta erit ipſa directrix A M B, ita vt ipſius radius caruedinis in puncto G ſit recta G M. Sit recta A D, quae curuam in ſupremo puncto A tangit, verticalis, ad cuius alteram partem ſimilis exiſtat curua directrix A M B, in figura non expreſſa, hocque pendulum iſta oſcillabitur, vt eius punctum G in curua G C ad alteram partem producta motu reciproco alternatim deſcendat et aſcendat, ſicque oſcillationes perficiat.

§. 9. Conſideremus primum huius corporis ſitum naturalem, quo eius centrum grauitatis in rectae verticalis A C puncto C verſatur, et in quo ſitu pendulum, niſi iam motum habeat perpetuo ſit quieturum. In hoc ſitu ſit punctum D centrum oſcillationis totius penduli, cuius diſtantia a puncto A prodit, ſi ſingulae corporis particulae per quadrata diſtantiarum ab axe A multiplicentur, horumque

que productorum omnium ſumma per factum ex maſſa corporis in diſtantiam centri grauitatis ab axe A C diuidatur. Vel ſi per corporis centrum grauitatis C transfixus concipiatur axis horizontalis ipſi axi A, qui ad planum verticale C A G normalis intelligatur, parallelus, ſingulaeque corporis particulae in quadrata diſtantiarum ſuarum ab hoc axe ducantur, atque horum productorum ſumma vocetur $= M k k$, denotante M maſſam ſeu pondus totius penduli, quam expreſſionem momentum inertiae corporis reſpectu iſtius axis per C ducti appello, erit rectangulum C D, A C $= k k$ ſeu C D $= \frac{k k}{AC}$. ſicque ex quantitate cognita $k k$ centrum oſcillationis D determinatur.

§. 10. Cum iam pendulum in alium quemcunque ſitum AMG peruenerit, vbi curuam directricem AMB in puncto M tangat: hic non amplius circa axem A, ſed circa punctum M primo quidem inſtanti motu angulari feretur. Hinc interuallum inter centrum grauitatis G et centrum oſcillationis H non amplius aequale erit interuallo C D in ſitu naturali, ſed ob diminutam penduli longitudinem M G, ſeu axem motus nunc in M promotum, interuallum G H maius erit quam C D; cum enim eſſet C D $= \frac{k k}{A C}$, ob eandem rationem nunc erit G H $= \frac{k k}{M G}$, ſeu G H . C D $=$ A C : M G. Quare cum pendulum compoſitum continuo perinde moueatur, ac ſi vniuerſa eiusmodi in centro oſcillationis eſſet collecta, perſpicuum eſt, ob variabilitatem huius centri H nullum pendulum ſimplex exhiberi poſſe, cuius motus cum motu pen-

 duli

duli compoſiti conueniat, niſi curua directrix A M B prorſus tollatur.

§. 11. Huc accedit, vt dum penduli portio A M curuae directrici A M B applicatur, ea tantiſper motus non fiat particeps. Quam ob rem cum quouis momento ea tantum maſſa, quae cum pendulo mouetur, ſpectari debeat, ipſa quoque maſſa eiusque adeo centrum grauitatis erit variabile, hincque porro eiusdem momentum inertiae reſpectu axis per centrum grauitatis ducti, quod ante vocauimus $= M k k$ continuo immutabitur, ex quo longe alia centri oſcillationis ratio mutabilitatis exiſtet. Vt igitur hanc poſteriorem difficultatem remoueamus, ſuperiorem penduli partem flexibilem, qua eius maſſa, modo aucta, modo minuta, cenſeri debet, leuiſſimam inferiorem vero partem E F, quae penduli molem proprie conſtituit, grauiſſimam aſſumamus, vt augmenta illa et decrementa ex portione leuiſſima orta ſine errore pro nihilo reputari queant, ſimili modo quo reſiſtentiae aeris effectum negligimus.

§. 12. Reiecta igitur maſſa portionis flexibilis A M tanquam minima, quippe quae re vera, niſi oſcillationes admodum amplae efficiantur, valde parua exiſtit, ſit reliqua penduli maſſa $= M$, eius centrum grauitatis G, eiusque momentum inertiae reſpectu axis horizontalis per G ducti $= M k k$, quae quantitas ex motu oſcillatoris libero definiri poteſt, dum pendulum remota curua directrice A M B ad oſcillationes minimas incitatur, ſi enim hoc caſu centrum oſcillationis reperiatur in D, vt ſit A D longitudo penduli ſimplicis iſochroni, erit $k k = A C . C D$. exiſtente C corporis centro grauitatis.

Vt

Vt igitur praeſens penduli ſitus, quo eius centrum grauitatis in G verſatur, ſymbolis exprimatur, ponatur curuae directricis portio A M $= s$ et tota penduli longitudo A M G $= a$, quae eſt conſtans et ipſi A C aequalis, erit diſtantia M G $= a - s$, quae ſimul eſt radius oſculi curuae C G in puncto G. Deinde per M ducatur recta verticalis M S, ac vocetur angulus declinationis penduli S M G $= \Phi$.

§. 13. Ponamus pendulum ex ſitu A C motum ita inchoaſſe, vt ibi celeritas centri grauitatis C debita fuerit altitudini b, ſeu ipſa celeritas $= \sqrt{b}$; hinc autem elapſo tempore $= t$ perueniſſe in ſitum A M G, vbi centri grauitatis G celeritas ſit $= \sqrt{v}$. Iam tempuſculo infinite paruo $= dt$ vlterius progrediatur in g, ita vt nunc curuae directrix A M B tangatur in puncto m, exiſtente eius elemento M $m = ds$; erit angulus infinite paruus G M $g = d\Phi$, et ſpatiolum percurſum G$g = (a-s)d\Phi$, quod per tempuſculum dt diuiſum dabit celeritatem centri grauitatis, ita vt ſit $\sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$ et $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$. Cum autem inclinatio penduli ad rectam verticalem M S tempuſculo hoc dt creſcat angulo $= d\Phi$, motus corporis in G erit duplex, alter progreſſiuus ſecundum directionem G g celeritate $= \sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$, alter gyratorius circa axem per G tranſeuntem, cuius celeritas angularis $= \frac{d\Phi}{dt}$. Hoc enim duplici motu coniuncto verus penduli motus exiſtet; quippe qui ſemper conſiderari poteſt tanquam compoſitus ex motu progreſſiuo centri grauitatis, et ex gyratorio circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem.

§. 14. Antequam in effectum grauitatis, quo iſte duplex motus retardetur, inquiramus, inueſtigemus perturbationem motus a vi quacunque ſollicitante oriundam. Sollicitetur ergo pendulum in puncto quopiam Z a vi Z X = P, cuius directio Z X et ad rectam M Z normalis, quia vires obliquae eatenus tantum motum penduli afficiunt, quatenus per reſolutionem praebent vim ad directionem M Z normalem. Sit interuallum G Z = b ac primo quidem modus progreſſiuus perinde afficietur, ac ſi haec vis Z X = P in ipſo centro grauitatis eſſet applicata; quae ergo motum retardabit. Hinc cum maſſa corporis ſit = M, per leges ſollicitationis eſt:

$$\frac{2\, d.(a-s)\, d\Phi}{dt^2} = \frac{-P}{M} \text{ poſito } dt \text{ conſtante.}$$

Deinde cum huius vis P momentum ſit reſpectu motus gyratorii = P b, et momentum inertiae corporis = Mkk erit retardatio motus gyratorii:

$$\frac{2\, dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}.$$

§. 15. Hoc modo vterque corporis motus afficeretur, ſi corpus eſſet liberum, et ad omnes motus recipiendos aeque comparatum. Cum autem ob ſuſpenſionis rationem motus gyratorius perpetuo datam teneat rationem ad motum progreſſiuum, hinc punctum Z definietur, in quo vim P applicari oporteat, vt vtrique motui conueniens immutatio ſimul inducatur. Poſitionem vero huius puncti Z binae ante inuentae formulae ſponte indicant: cum enim ex iis haec naſcatur analogia:

$$dd\Phi : d\,(a-s)\,d\Phi = b : kk$$

$$\text{erit } b = \frac{kk\, dd\Phi}{d.(a-s)\, d\Phi} = \frac{kk\, dd\Phi}{(a-s)\, dd\Phi - ds\, d\Phi}.$$

Vnde

Vnde patet punctum hoc Z non incidere in centrum oſcillationis H, quod puncto ſuſpenſionis M conueniat. Eſt enim $GH = \frac{kk}{a-s}$; cui quidem aequale foret interuallum $b = GZ$, ſi foret $ds = 0$, hoc eſt ſi punctum ſuſpenſionis M non eſſet variabile. Ob eius igitur variabilitatem interuallum G Z maius erit quam G H.

§. 16. Inuento hoc puncto Z, in quo vis applicata motum ad ſuſpenſionis penduli rationem accommodatum gignit, vim iſtam P ita definiamus, vt ſollicitationi grauitatis aequi polleat; vt motum penduli a grauitate oriundum obtineamus. Vis grauitatis autem aequalis eſt ponderi penduli $= M$, eiusque directio per ipſum centrum grauitatis G deorſum tendit. Repraeſentet ergo recta verticalis G V hanc vim, quae ſit $= M$; atque nihil aliud ſupererit, niſi vt vis illius P momentum reſpectu puncti ſuſpenſionis M aequale reddatur momento vis grauitatis. Ob angulum itaque $VGF = \Phi$ erit

$M.MG.\,\text{ſin.}\,\Phi = P.MZ$ ſeu $P = \frac{M(a-s)\,\text{ſin.}\,\Phi}{a-s+b}$; cum autem ſit $b = \frac{kkdd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$ erit

$$a-s+b = \frac{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$$

ideoque $P = \frac{M((a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdd\Phi}$,

et $Pb = \frac{Mkk(a-s)dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdd\Phi}$.

§. 17. Quoniam igitur pro motu penduli ſupra altera aequatio inuenta eſt: $\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}$, ſi loco Pb valorem modo repertum ſubſtituamus, proueniet haec aequatio:

2 d d Φ

$$\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-(a-s)dd\Phi\ \text{ſin.}\,\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)ds\,d\Phi + kk\,dd\Phi}$$

quae transformabitur in hanc :

$$2(a-s)^2 dd\Phi - 2(a-s)ds\,d\Phi + 2kk\,dd\Phi = -(a-s)dt^2\ \text{ſin.}\,\Phi$$

qua motus penduli a grauitate perturbatus, ideoque ipſe motus oſcillatorius determinabitur. Quia vero in hac aequatione differentiale dt ponitur conſtans, ea per $d\Phi$ multiplicetur, atque integretur, ſic prodibit :

$$(a-s)^2 d\Phi^2 + kk\,d\Phi^2 = (dt^2 - dt^2 \int (a-s)d\Phi\ \text{ſin.}\,\Phi$$

vbi quia curua directrix A M B tanquam data aſſumitur integrale $\int (a-s)d\Phi$ ſin. Φ ob relationem inter s et Φ datam exhiberi poterit : ita autem id accepi, ponamus, vt euaneſcat poſito $s = 0$, quo caſu etiam ſit $\Phi = 0$; eritque

$$dt = \frac{d\Phi\sqrt{(kk + (a-s)^2)}}{\sqrt{(C - \int (a-s)d\Phi\ \text{ſin.}\,\Phi)}}.$$

§. 18. Cum ſit altitudo celeritati debita $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$ erit nunc $v = \frac{(a-s)^2(C - \int (a-s)d\Phi\ \text{ſin.}\,\Phi)}{kk + (a-s)^2}$; quae expreſſio ad ſtatum initialem in ſitu penduli verticali A C D transferatur, vbi ſit $s = 0$; et $\int (a-s)d\Phi$ ſin $\Phi = 0$. Quare cum hoc ſtatu ſit $v = b$, erit $b = \frac{aac}{kk + aa}$, vnde loco conſtantis c celeritas initialis $\sqrt{b}$ in calculum introduci poterit. Sit D centrum oſcillationis penduli in ſitu verticali, erit ob $AC = a$, $CD = \frac{kk}{a}$ ideoque $AD = \frac{aa + kk}{a}$, quo valore ſubſtituto habebitur $b = \frac{AC.c}{AD}$. Quod ſi porro curuae deſcriptae C G ponatur abſciſſa $CQ = x$, ob $Cg = (a-s)d\Phi$, et rectam G M ad curuam C G normalem erit ſin. GMS $=$ ſin. $\Phi = \frac{dx}{Cg} = \frac{dx}{(a-s)d\Phi}$; ideoque $dx = (a-s)d\Phi$ ſin. Φ et

et $\int(a-s)d\Phi$ ſin. $\Phi = x = CQ$. Hinc ergo erit $v = \frac{(a-s)^2(c-x)}{kk+(a-s)^2}$; et ob $MG = a-s$; $GH = \frac{kk}{a-s}$ altitudo celeritati debita v ita exprimetur, vt ſit $v = \frac{MG(c-x)}{MH}$.

§. 19. Conſideremus curuam deſcriptam CG tamquam datam, quoniam ex ea curua directrix AMB definitur et contra; ſitque poſita eius abſciſſa verticali $CQ = x$, arcus iam deſcriptus $CG = z$, et radius oſculi $GM = r$, erit $a-s = r$; et $\frac{dz}{r} = d\Phi$; hinc ergo fit primo altitudo celeritati centri grauitatis in G debita $v = \frac{rr(c-x)}{kk+rr}$, vnde patet, pendulum eo vsque eſſe aſcenſurum, donec fiat $x = c$. Deinde vero elementum temporis dt ita exprimetur, vt ſit:

$$dt = \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$$

cuius integrale debite ſumtum indicabit tempus, quo pendulum per arcum indefinitum $CG = z$ ad altitudinem indefinitam $CQ = x$ aſcendit. Quodſi ergo in hac expreſſione ponatur $x = c$, habebitur tempus totius aſcenſus, cui cum tempus ſequentis deſcenſus, ob defectum reſiſtentiae aequale ſit, pendulumque ex altera parte per ſimilem curuam incedat, erit tempus vnius oſcillationis $= 2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$, ſiquidem poſt integrationem ponatur $x = c$.

§. 20. Quando ergo in hac expreſſione, poſtquam factum eſt $x = c$, quantitas c relinquitur, duratio cuiusque oſcillationis ab amplitudine arcus ea deſcripti pendebit, neque propterea omnes oſcillationes ſiue ſint maiores, ſiue minores aequalibus temporibus abſoluentur. Quo igitur omnes oſcillationes fiant iſochronae, expreſſionem

 inuen-

inuentam $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ita comparatam eſſe oportet, vt poſito poſt integrationem $x = c$, quantitas c ex ea penitus diſcedat, idemque conſtanter eius integralis valor reſultet, quaecunque magnitudo litterae c tribuatur. Ex hac igitur affectione, ſi conueniens relatio inter z et x definiatur, vt ante memorata proprietas locum inueniat; cognoſcetur natura illius curuae C G, ſecundum quam, ſi pendulum moueatur, id omnes oſcillationes aequalibus temporibus ſit peracturum.

§. 21. Quo igitur facilius huius curuae C G, qua cuiusque penduli compoſiti tautochronismus continetur, naturam inueſtigemus, primo pendulum ſimplex contemplemur, cuius tota maſſa in puncto G ſit collecta. Quoniam ergo corpus extra hoc punctum G nullas habet partes erit, $kk = 0$, ac propterea tempus vnius oſcillationis erit $= 2\int\frac{dz}{\sqrt{(c-x)}}$: cuius valor a c non pendebit, ſi fuerit $dz = \frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{x}}$; et $z = 2\sqrt{fx}$; quae eſt aequatio pro cycloide. Eius autem radius oſculi in imo puncto C, quia ſub normali aequatur, erit $= \frac{zdz}{dx} = 2f$, qui cum ipſi A C $= a$ aequalis eſſe debeat, fiet $f = \frac{1}{2}a$; ſeu f aequabitur ſemiſſi penduli ſimplicis iſochroni, quod quidem ſuas oſcillationes minimas perficiat. Hanc autem elegantiſſimam cycloidis proprietatem *Hugenius* elicuit, aliique Geometrae deinceps variis demonſtrationibus confirmauerunt.

§. 22. Vt ergo formula pro quocunque pendulo compoſito inuenta $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ad tautochronismum accom-

commodetur, neceſſe eſt, vt ea induat hanc formam $2\int\frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{(c-x)x}}$, ſic enim poſito poſt integrationem $x = c$, littera c ex calculo egredietur, atque ſingulae oſcillationes aequi diurnae erunt oſcillationibus minimis penduli ſimplicis, cuius longitudo ſit $= f$. Quodſi vero formula inuenta $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ cum hac $2\int\frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{x(c-x)}}$ conferatur, ſequens prodibit aequatio:

$\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$ ſeu $\sqrt{2fx} = \int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r}$.

Haec ergo aequatio exprimit naturam curuae C G tautochronae pro quocunque pendulo compoſito, quam non parum a cycloide diſcrepare, per ſe ſatis eſt manifeſtum.

§. 23. Quaeramus huius curuae radium oſculi in puncto C, quoniam is eſſe debet $= AC = a$. Fiet ergo hoc loco $r = a$ ac propterea $\sqrt{2fx} = \frac{z\sqrt{(aa+kk)}}{a}$; vnde erit $zz = \frac{2aafx}{aa+kk}$. Cum igitur in puncto C radius oſculi aequalis ſit ſubnormali $\frac{zdz}{dx} = \frac{aaf}{aa+kk}$, neceſſe eſt, vt ſit $\frac{aaf}{aa+kk} = a$, ideoque $f = a + \frac{kk}{a}$. Aequabitur ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni f longitudini $AD = a + \frac{kk}{a}$: quod quidem per ſe eſt perſpicuum, cum penduli huius compoſiti minimae oſcillationes, quibus maiores, quaeque ſunt iſochronae, fiant in arcubus circularibus radio A C deſcriptis, ac proinde non ſecus ſe habeant, ac ſi tota corporis maſſa in centro oſcillationis D eſſet collecta: ita vt ipſa longitudo A D exhibeat longitudinem penduli ſimplicis iſochroni.

§. 24. Aequatio autem pro curua tautochrona inventa: $\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{s}}{\sqrt{2x}} = \frac{dx\sqrt{(kk+aa)}}{\sqrt{2ax}}$ conſtructu eſt difficillima, neque variabiles vllo modo a ſe inuicem ſeparare licet. Quamuis enim radius oſculi r per binas reliquas variabiles x et z definiri queat, (erit enim, ſi applicata $QG = y$ ponatur, $r = \frac{-dz^3}{dxddy} = \frac{-dydz^2}{dxddz}$, poſito dx conſtante, vel $r = \frac{dzdy}{ddx}$ poſito dz conſtante, et $dy = \sqrt{(dz^2 - dx^2)}$); tamen hinc aequatio tantopere perturbaretur, vt nihil prorſus ex ea concludi poſſet. Sin autem ex ea vel x vel z exterminetur in multo maiores tricas delaberemur. Cum igitur pro pendulo ſimplici conſtructio curuae tautochronae ſit facillima, pro pendulo compoſito tantis laborat difficultatibus, vt eas nullo etiam nunc pacto ſuperare potuerim.

§. 25. Si quidem loco quantitatum x et z introducatur angulus variabilis Φ, non ſolum aequatio ad duas variabiles reducetur, ſed etiam a differentialibus ſecundi gradus liberabitur; neque tamen ad ſeparationem variabilium pertingere licet. Cum enim ſit $d\Phi = \frac{dz}{r}$, erit $dz = rd\Phi$, et $dx = (a - s)d\Phi \text{ ſin. } \Phi = rd\Phi \text{ ſin. } \Phi$, hincque $x = \int rd\Phi \text{ ſin. } \Phi$. Subſtituantur hi valores pro dz et dx in aequatione inuenta, prodibitque.

$$\sqrt{(kk+rr)} = \frac{r \text{ ſin. } \Phi \sqrt{(kk+aa)}}{\sqrt{2ax}}$$

vnde fit $2ax = \frac{(aa+kk)rr \text{ ſin. } \Phi^2}{kk+rr}$: quae differentiata dabit:

$adx =$

$$adx = \frac{(aa+kk)rrd\Phi\, ſin.\, \Phi\, coſ.\, \Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)k^2 rdr\, ſin.\, \Phi^2}{(kk+ar)^2}$$

Hic ſi pro dx valor $rd\Phi$ ſin. Φ ſubſtituatur, orietur

$$ad\Phi = \frac{(aa+kk)rd\Phi\, coſ.\, \Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)kkdr\, ſin.\, \Phi}{(kk+rr)^2}.$$

§. 26. Quamquam haec aequatio ad conſtructionis rationem aeque parum ac preecedens redigi poteſt, tamen aequatio $2ax = \frac{(aa+kk)rr\, ſin.\, \Phi^2}{kk+rr}$ inſignem continet proprietatem, qua curua iſta tautochrona C G determinari poteſt. Si enim in hac tautochrona C G ducantur radii oſculi C A et G M, ille quidem in puncto imo C, hic vero in puncto quocunque G, atque pro punctis ſuſpenſionis A et M centra oſcillationis notentur D et H, tum vero inſuper ducantur horizontalis G Q et verticalis M S; quoniam erit $AC = a$; $AD = a + \frac{kk}{r}$; $CQ = x$; $MG = r$; $MH = r + \frac{kk}{r}$, et $GS = r$ ſin. Φ erit:

$$2\,CQ = \frac{AD.\,GS^2}{MG.\,MH}.$$

Ducatur porro ex S recta S T in G M normalis, erit $2\,CQ = \frac{AD.\,GT}{MH}$ ſeu $AD : MH = 2\,CQ : GT$, vel $AD : 2\,CQ = MH : GT$. Qua concinna proprietate natura curuae tautochronae C G exponitur.

§. 27. Vt tamen non nullum fructum ex hac aequatione percipiamus, accommodemus eam ad eiusmodi pendula, in quibus quantitas kk ſit tam parua, vt prae reliquis quantitatibus, cum quibus comparatur, fere euaneſcat. Huiusmodi autem caſus exiſtet, ſi corpus penduli praecipuum E F ſit valde ponderoſum ſimulque mini-

 mum,

mum, ac praeterea oſcillationes ampliores excludantur. Tum enim quo longius ſumatur tale pendulum, eo minorem obtinebit valorem quantitas kk, reſpectu quantitatum aa et rr. Quod cum euenit, ſi aequationis inuentae integrale per ſeriem exprimatur, cuius termini ſecundum poteſtates ipſius kk progrediantur, ſufficiet huius ſeriei duos vel tres terminos initiales accepiſſe, cum ſequentes ob altiores ipſius kk poteſtates ſine errore praetermitti queant.

§. 28. Aequationem ergo quoque differentialem inuentam ſecundum poteſtates ipſius kk diſponamus, quae induet hanc formam:

$$\begin{aligned}&+ar^4d\Phi+2akkrrd\Phi+ak^4d\Phi\\&-aar^3d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi-a^2k^2rd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi-k^4rd\Phi\,\text{coſ}\,\Phi=0\\&\qquad-kkr^3d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi-k^4dr\,\text{ſin.}\,\Phi\\&\qquad-aakkdr\,\text{ſin.}\,\Phi\end{aligned}$$

ex qua, ſi kk euaneſceret, foret $r=a\,\text{coſ.}\,\Phi$; ponamus ergo ad valorem ipſius r veriorem inueniendum:

$$r=a\,\text{coſ.}\,\Phi+k^2P+k^4Q+\text{etc. erit}$$

$$dr=-ad\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi+k^2dP+k^4dQ+\text{etc. atque}$$

$$\begin{aligned}r^2=\;&a^2\,\text{coſ.}\,\Phi^2+2ak^2P\,\text{coſ.}\,\Phi+2ak^4Q\,\text{coſ.}\,\Phi+\text{etc.}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+k^4PP\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r^3=\;&a^3\,\text{coſ.}\,\Phi^3+3a^2k^2P\,\text{coſ.}\,\Phi^2+3a^2k^4Q\,\text{coſ.}\,\Phi^2\\&\qquad\qquad\qquad\qquad+3ak^4P^2\,\text{coſ.}\,\Phi\end{aligned}+\text{etc.}$$

$$\begin{aligned}r^4=\;&a^4\,\text{coſ.}\,\Phi^4+4a^3k^2P\,\text{coſ.}\,\Phi^3+4a^3k^4Q\,\text{coſ.}\,\Phi^3\\&\qquad\qquad\qquad\qquad+6a^2k^4P^2\,\text{coſ.}\,\Phi^2\end{aligned}+\text{etc.}$$

§. 29.

§. 29. Quodſi iam hi valores in aequatione differentiali ſubſtituantur, orietur ſequens aequatio:

$$\begin{aligned}
&+a^6 d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^4 + a^4 k^2 P d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3 + a^4 k^4 Q d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^6 \\
&-a^5 d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^4 + a^3 k^2 d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^2 + 3 a^3 k^4 P^2 d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^6 \\
&\qquad -a^3 k^2 d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^4 + 3 a^2 k^4 P d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi \\
&\qquad +a^3 k^2 d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi^2 - 3 a^2 k^4 P a \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3 = 0 \\
&\qquad\qquad - a^2 k^4 dP \operatorname{ſin.} \Phi \\
&\qquad\qquad + a k^4 d\Phi \\
&\qquad\qquad - a k^4 d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^6 \\
&\qquad\qquad + a k^4 d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi^2
\end{aligned}$$

Hinc termino ſecundo ad nihilum redacto fiet:

$$a P \operatorname{coſ.} \Phi^3 + \operatorname{coſ.} \Phi^2 - \operatorname{coſ.} \Phi^4 + \operatorname{ſin.} \Phi^2 = 0$$

ideoque $P = \frac{-1 + \operatorname{coſ.} \Phi^4}{a \operatorname{coſ.} \Phi^3} = \frac{-1}{a \operatorname{coſ.} \Phi^3} + \frac{\operatorname{coſ.} \Phi}{a}$: ex quo porro fit $dP = \frac{-3 d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi}{a \operatorname{coſ.} \Phi^4} - \frac{d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi}{a}$

et $P^2 = \frac{1}{aa \operatorname{coſ.} \Phi^6} - \frac{2}{aa \operatorname{coſ.} \Phi^2} + \frac{\operatorname{coſ.} \Phi^2}{aa}$.

§. 30. Tertius porro terminus ad nihilum redactus dat:

$$a^3 Q \operatorname{coſ.} \Phi^3 + 3 a^2 P^2 \operatorname{coſ.} \Phi^2 + 3 a P \operatorname{coſ.} \Phi - 3 a P \operatorname{coſ.} \Phi^3 - a dP \operatorname{ſin.} \Phi : d\Phi + 2 \operatorname{ſin} \Phi^2 = 0$$

quae aequatio, ſi loco P^2, P, et dP valores modo inventi ſubſtituantur abibit in:

$$a^3 Q \operatorname{coſ.} \Phi^3 + \frac{3}{\operatorname{coſ.} \Phi^4} - 3 - \frac{3}{\operatorname{coſ.} \Phi^2} + 3 \operatorname{coſ.} \Phi^2 + 3 \operatorname{ſin.} \Phi^2 + \frac{3 \operatorname{ſin.} \Phi^2}{\operatorname{coſ.} \Phi^4} = 0$$

ſeu ob $\operatorname{ſin.} \Phi^2 = 1 - \operatorname{coſ.} \Phi^2$ habebitur

$$a^3 Q \operatorname{coſ.} \Phi^3 + \frac{6}{\operatorname{coſ.} \Phi^4} - \frac{6}{\operatorname{coſ.} \Phi^2} = 0$$

ideoque $Q = \frac{-6 + 6 \operatorname{coſ.} \Phi^2}{a^3 \operatorname{coſ.} \Phi^7} = \frac{-6 \operatorname{ſin.} \Phi^2}{a^3 \operatorname{coſ.} \Phi^7}$.

Quam

Quam ob rem erit proxime:

$$r = a\,\mathrm{coſ}.\,\Phi - \frac{kk(1 - \mathrm{coſ}.\,\Phi^4)}{a\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^5} - \frac{6k^4\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^2}{a^3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^7}$$

vnde patet in ſitu penduli verticali, quo eſt $\Phi = 0$, fore $r = a = AC$, vti rei natura poſtulat.

§. 31. Pro curua ergo tautochrona CG, quae conveniat corporibus, in quibus quantitas kk valde eſt parua, nacti ſumus aequationem inter eius radium oſculi $GM = r$, eiusque amplitudinem ſeu angulum $GMS = \Phi$, ex qua aequatione quantitates conſtructioni huius curuae inſeruientes ſequenti modo definientur. Sit arcus curuae $CG = z$; abſciſſa $CQ = x$ et applicata $QG = y$ eritque $dz = r\,d\Phi$; $dx = r\,d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi$ et $dy = r\,d\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi$. Hinc ergo obtinebitur:

$$z = a\int d\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^5} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^2}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^7}$$

$$x = a\int d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^5} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^3}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^6}$$

$$y = a\int d\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2 - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^2} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2 - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^2}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^6}.$$

§. 32. Integralia vero haec ita ſe habent, vt ſit:

$$\int d\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi = \mathrm{ſin}.\,\Phi;\ \int d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi = \tfrac{1}{2}\mathrm{ſin}.\,\Phi^2;\ \int d\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{2}\mathrm{ſin}.\,\Phi\,\mathrm{coſ}.\,\Phi$$

$$\int\frac{d\Phi}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^3} = \frac{\mathrm{ſin}.\,\Phi}{2\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,\mathrm{tang}.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi);\ \int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^3} = \frac{1}{2\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2};\ \int\frac{d\Phi}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^2} = \frac{\mathrm{ſin}.\,\Phi}{\mathrm{coſ}.\,\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^2}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^7} = \frac{\mathrm{ſin}.\,\Phi}{6\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^6} - \frac{\mathrm{ſin}.\,\Phi}{24\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^4} - \frac{\mathrm{ſin}.\,\Phi}{16\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2} - \tfrac{1}{16}\,l\,\mathrm{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$$\int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^3}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^7} = \frac{1}{6\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^6} - \frac{1}{4\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^4};\ \int\frac{d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^2}{\mathrm{coſ}.\,\Phi^6} = \frac{\mathrm{ſin}.\,\Phi}{5\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^5} - \frac{\mathrm{ſin}.\,\Phi}{15\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^3} - \frac{2\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{15\,\mathrm{coſ}.\,\Phi}.$$

His ergo valoribus ſubſtitutis habebitur:

$$z = a\,\mathrm{ſin}.\,\Phi + \frac{kk}{a}\,\mathrm{ſin}.\,\Phi - \frac{kk\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{2a\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2} - \frac{kk}{2a}\,l\,\mathrm{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$
$$-\frac{k^4\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{a^3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^6} + \frac{k^4\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{4a^3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^4} + \frac{3k^4\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{8a^3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2} + \frac{3k^4}{8a^3}\,l\,\mathrm{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$x =$

$$x = \tfrac{1}{2} a \,\text{ſin.}\, \Phi^2 + \tfrac{kk}{2a} \,\text{ſin.}\, \Phi^2 + \tfrac{kk}{2a} - \frac{kk}{2a \cos. \Phi^2} - \frac{k^4}{2a^3} - \frac{k^4}{a^3 \cos. \Phi^6} + \frac{3k^4}{2a^3 \cos. \Phi^4}$$

$$y = \tfrac{1}{2} a \Phi + \tfrac{1}{2} a \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi + \tfrac{kk}{2a} \Phi + \tfrac{kk}{2a} \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi - \frac{kk \sin. \Phi}{a \cos. \Phi}$$
$$- \frac{6k^4 \sin. \Phi}{5a^3 \cos. \Phi^5} + \frac{2k^4 \sin. \Phi}{5a^3 \cos. \Phi^3} + \frac{4k^4 \sin. \Phi}{5a^3 \cos. \Phi}$$

vnde pro quouis angulo Φ coordinatae curuae tautochronae x et y aſſignari, ideoque ipſa curua quaeſita C G conſtrui poterit.

§. 33. Ad vſum autem pendulorum expediet huius curuae euolutam, ſeu ipſam curuam directricem A M B conſtruere; quo igitur hanc curuam A M B, quae pendulo motum tautochronum conciliat, definiamus, poſito eius arcu quocunque A M $= s$, ſit abſciſſa A P $= p$, et applicata P M $= q$; erit $s = a - r$; $dp = ds \,\text{coſ.}\, \Phi$ et $dq = ds \,\text{ſin.}\, \Phi$, ideoque $p = \int ds \,\text{coſ.}\, \Phi$ et $q = \int ds \,\text{ſin.}\, \Phi$. Ex ſuperioribus ergo habebitur:

$$s = a - a \,\text{coſ.}\, \Phi - \frac{kk \cos. \Phi}{a} + \frac{kk}{a \cos. \Phi^3} - \frac{6k^4}{a^3 \cos. \Phi^5} + \frac{6k^4}{a^3 \cos. \Phi^7}$$

vnde fit:

$$ds = a d\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi + \frac{kk d\Phi \sin. \Phi}{a} + \frac{3kk d\Phi \sin. \Phi}{a \cos. \Phi^4} - \frac{30 k^4 d\Phi \sin. \Phi}{a^3 \cos. \Phi^6} + \frac{42 k^4 d\Phi \sin. \Phi}{a^3 \cos. \Phi^8},$$

hincque porro:

$$dp = a d\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi + \frac{kk d\Phi \sin. \Phi \cos. \Phi}{a} + \frac{3kk d\Phi \sin. \Phi}{a \cos. \Phi^3} - \frac{30 k^4 d\Phi \sin. \Phi}{a^3 \cos. \Phi^5} + \frac{42 k^4 d\Phi \sin. \Phi}{a^3 \cos. \Phi^7}$$

$$dq = a d\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^2 + \frac{kk d\Phi \sin. \Phi^2}{a} - \frac{3kk d\Phi}{a \cos. \Phi^2} + \frac{3kk d\Phi}{a \cos. \Phi^4} + \frac{30 k^4 d\Phi}{a^3 \cos. \Phi^4} - \frac{72 k^4 d\Phi}{a^3 \cos. \Phi^6} + \frac{42 k^4 d\Phi}{a^3 \cos. \Phi^8}$$

§. 34. Quodſi iam hae formulae debite integrentur, primo quidem reperietur abſciſſa

$$p = \tfrac{1}{2} a \,\text{ſin.}\, \Phi^2 + \frac{kk \sin. \Phi^2}{2a} - \frac{3kk}{2a} + \frac{3kk}{2a \cos. \Phi^2} - \frac{15 k^4}{2a^3 \cos. \Phi^4} + \frac{7k^4}{a^3 \cos. \Phi^6} + \frac{k^4}{2a^3}$$

Deinde cum ſit: $\int d\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^2 = \tfrac{1}{2} \Phi - \tfrac{1}{2} \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi$

$$\int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}\,;\ \int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^4} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{3\,\text{coſ.}\,\Phi^3} + \frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi}{3\,\text{coſ.}\,\Phi}\,;$$

$$\int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^6} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{5\,\text{coſ.}\,\Phi^5} + \frac{4\,\text{ſin.}\,\Phi}{15\,\text{coſ.}\,\Phi^3} + \frac{8\,\text{ſin.}\,\Phi}{15\,\text{coſ.}\,\Phi}$$

$$\int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^8} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{7\,\text{coſ.}\,\Phi^7} + \frac{6\,\text{ſin.}\,\Phi}{35\,\text{coſ.}\,\Phi^5} + \frac{8\,\text{ſin.}\,\Phi}{35\,\text{coſ.}\,\Phi^3} + \frac{16\,\text{ſin.}\,\Phi}{35\,\text{coſ.}\,\Phi}$$

obtinebitur:

$$q = \tfrac{1}{2}a\Phi - \tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{kk\Phi}{2a} - \frac{kk\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{2a} - \frac{kk\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,\text{coſ.}\,\Phi} + \frac{kk\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,\text{coſ.}\,\Phi^3}$$
$$+ \frac{k^4\,\text{ſin.}\,\Phi}{a^3\,\text{coſ.}\,\Phi}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5\,\text{coſ.}\,\Phi^2} - \frac{16}{5\,\text{coſ.}\,\Phi^4} + \frac{6}{\text{coſ.}\,\Phi^6}\right).$$

Cum igitur ambae coordinatae p et q ex dato angulo Φ qui curuae quoque A M amplitudinem metitur, determinari queant, curua quaeſita A M B non difficulter conſtruetur.

PHYSICO

PHYSICO-
MATHEMATICA.

* DE ARGENTO VIVO
CALOREM CELERIVS RECIPIENTE ET CELERIVS PERDENTE QVAM MVLTA FLVIDA LEVIORA EXPERIMENTA ET COGITATIONES.

AVCTORE
G. *W. Richmann.*

Exemplum nouum propono in Phyſicis, ſine experimentis absque periculo nihil facile ſtabiliri poſſe, et nudis ratiociniis experientia non firmatis viam ad errores ſaepius patefieri. Receptum eſt a multis, primi ordinis etiam Philoſophiae naturalis cultoribus, inſtar axiomatis, denſiora corpora difficilius calefieri, et difficilius calorem acquiſitum perdere, quam rariora; et hinc etiam argentum viuum difficilius calefieri aqua et aliis fluidis, difficiliusque refrigerari. Et hoc non absque veri ſpecie factum, cum maiori materiae quantitati difficilius motus ab igne imprimi poſſe videatur, quam minori quantitati materiae. Hinc ſcriptum eſt in P. van *Muſſchenbrockii* Elem. Phyſ. ed. 1734. §. 573: *Quo grauiora et duriora ſunt corpora, eo difficilius igniuntur, veluti ferrum, cuprum, ſaxa, ſed haec quoque diutiſſime ignem retinent. Quo leuiora ſunt corpora, eo citius ignem amittunt: hinc aër ocyus calorem perdit, quam Alcohol, hoc citius aqua,*

 haec

* Traditae ſunt anno 1750. et anno 1752. incidit in manus *Cel. Nolletii* lectionum Phyſ. quartus Tomus anno 1749. euulgatus, vbi idem aſſeritur et experimentis confirmatur: Spero tamen lectorem ex ratione experimentorum abunde cogniturum, me *Cel. Nolletii* IV. Tomum nondum vidiſſe, dum has cogitationes concinnaui.

haec citius Mercurio. Eadem affirmata in Praelectionibus in Phyſicam Theoreticam *G. W. Krafftii*, §. 367. vbi aqua calorem citius amittere dicitur, quam Mercurius ob minorem denſitatem. Neque Mercurius ſuam inſignem mobilitatem per calorem praeſtantiſſimis Chymicis prodidit. *Hermannus Boerhave* ſcribit Tomo I. Chemiae in Capite de igne exp. XXI: *Quo denſiora corpora, ſiue fluida fuerint, ſiue conſiſtentia, eo pluri tempore egent, vt ab eodem igne aequaliter incaleſcant .... caleſcit citiſſime aer, dein Alcohol, oleum Petrolei limpidiſſimum poſtea, tum oleum Terebinthinae, mox aqua pura, dein aqua ſalſa, lixiuium fortiſſimum, metalla mercurius aurum.* Idem aſſeritur Experim. XX. Corrol. 9, ratione refrigerationis. Vt rite iudicari poſſit, quae corpora caloris tenaciſſima ſint, omnes conditiones l. c. Corrol. 17. ſequentibus comprehendit: *Quo corpus aliquod conſtat materia denſiore, quo maius exiſtit mole, quo deinde figurae exactius ſphaericae, eo etiam idem erit aptius, ignem receptum diutius in ſe conſeruare; id et experientia vbique confirmat. Sed ſi tunc ſimul hoc corpus ſpatio inhaeret omnium rariſſimo, aut inani penitus, tum conſpirabunt omnes cauſae Phyſicae hactenus notae calori diu conſeruando.* Hic notandum, nullam cohaerentiae maioris vel minoris haberi rationem, quae tamen non parum hic concurrere, et diuerſitatis haut exigua cauſa eſſe videtur. Silentio praeterire liceat quam plurimos alios antiquiores et recentiores, qui idem aſſeruerunt. Curatius hanc rem attigerunt *G. E. Hamberger* et G. I. *Graveſande*. Hic in Elem. Phyſ: Math: Tom. II. n. 2400 ſcribit: *Non ignis aeque facile corpora omnia intrat, quod variis cauſis, non omnibus notis, tribuendum;* et

et n. 2515. *In multis occaſionibus non eodem modo in idem corpus agunt corpora aeque calida; neque in corporibus variis, eodem fluido aequaliter vbique calido circumdatis, aequali tempore calor aequalis ſit calori ipſius fluidi*; et n. 2516. *difficilius corpora quaedam aliis incaleſcunt, et quidem ex duplici cauſa; non enim aeque facile corporum omnium partes agitantur, et in quaedam difficilius ignis, quam in alia, penetrat*; et n. 2517. *Corporum partes diuerſae ſunt, et in diuerſis corporibus non tantum denſitate differunt, ſed etiam cohaeſione, vnde non aeque facile eadem ipſis communicatur agitatio; quare inaequales ignis actiones deſiderantur; vt aequales gradus caloris corporibus communicentur et calor non ſequitur proportionem quantitatis ignis. Hamberger* in Elem. Phyſ. §. 430. edit. 2. ſcribit: Ignis in corpus ſolidum quodcunque penetrat, et deinde n. 4. *Maior ignis copia requiritur ad conciliandum eundem caloris gradum corpori ſolido, quam aquae et aëri, magis enim reſiſtit corpus ſolidum motui, ex igne oriundo, quam aqua et aër: ob cohaerentiam partium, et ob partium maiorem copiam ſolida maiorem ignis copiam retinere, hinc in quiete conſeruare valent, quam aqua et aër ſub eadem mole; quaecunque igneae particulae vero non mouentur, iſtae calorem dare nequeunt; et* n. 5. *Corpora ſolida pro diuerſa grauitate ſpecifica diuerſam caloris quantitatem ex aëre abſorbent, vnde eſt, quod conclauia, quorum parietes ſunt lapidei, difficilius longe calefiant, quam ea, quorum parietes ſunt lignei*; n. 6. *Diutius tamen ob easdem cauſas* n. 4, *calorem quoque ſeruant ſolida, quam aqua aër.* Ex his videre eſt, *Graveſandium* et *Hambergerum* ad tenacitatem caloris maiorem requirere cohaeren-

cohaerentiam maiorem coniunctam cum denſitate maiori. Denſitatem certe ſolam, maiorem vel minorem, non eſſe conditionem maioris vel minoris tenacitatis caloris, ex ſequentibus Experimentis videtur apparere; quae forte ad leges communicationis caloris diuerſorum corporum eruendas, aliquid conferre poterunt, in qua materia in Phyſicis parum mihi praeſtitum eſſe videtur; quare etiam imposterum, quomodo ſolida diuerſa calorem communicent inter ſe et cum fluidis, examinare animus eſt.

Experim. I.

§. 1. Elegi 1) duo vaſa vitrea cylindrica eiusdem diametri, altitudinis et craſſitiei, (diameter capacitatis vtriusque erat 2. dig. Lond. et altitudo quinque digitorum), et ſuſpendi ea ita, vt ab aëre temperiei 65 graduum Therm. F. contingerentur. 2) Vni vaſorum infudi argentum viuum, (cuius grauitas ſpecifica ad grauitatem ſpec. aquae erat, vt 13, 57 : 1), vsque ad altitudinem duorum digitorum et 4 linearum, et caleſeci illud, alteri aquam calidam ad eandem altitudinem. 3) Immerſi vtrique maſſae Thermometrum mercuriale ad eandem profunditatem, cumque obſeruarem, diſcrepantiam caloris indicari, effeci maiore calore frigidiori maſſae adplicato, vt diſcrepantia nulla appareret. 4) Notare incepi, a) tempus decreſcentis caloris, b) gradum caloris aquae, et c) decrementum caloris aquae poſt quoduis temporis interuallum ab initio obſeruationis, d) gradum caloris argenti viui, et e) decrementum graduum caloris argenti viui poſt tempus definitum, vti ex ſequenti Tabula videre eſt.

Poſt

Poſt Temp.	grad. cal. aq.	decr.	grad. cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	132	0	131	0
7	122	10	118	13
12	115½	16½	109	22
17	111	21	104	27
22	107	25	99	32
27	103	29	94	37
42	93	39	84	47
47	90	42	81	50
52	88	44	79	52
62	84	48	76	55
72	81	51	73	58
87	78	54	71⅓	59⅔
92	77	55	71	60
97	76	56	70	61

Experim. II.

§. 2. Produxi in vtraque maſſa, aquea et argenti viui eandem ferme temperiem ſcil. 78 gr. temperies vero aëris, in quo refrigeratio fiebat, erat 65 gr. et obſeruaui :

Poſt Temp.	cal. aq.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	78	0	78	0
4	77½	½	77¾	¼
12	76½	1½	75½	2½
18	75½	2½	74	4
34	73	5	71½	6½
46	72	6	70	8
70	70	8	68½	9½.

Experim. III.

§. 3. Immerſi vtramque maſſam aquae cum fruſtulis glaciei vsque ad gr. 33. Therm. *Fabr.* frigefactae, cum vtraque haberet temperiem 69 gr. et notaui, vt antea; in temperie aëris 65 gr.

Poſt Temp.	cal. aq.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	69	0	69	0
5	56	13	41	28
10	47	22	35	34
16	42	27	34	35
19½	39	30	33½	35½
24½	37	32	33¼	35¾
28½	36½	32½	33	36
47½	34⅓	34⅔	33	
62	34	35	33.	

Experim. IV.

§. 4. In temperie aëris 66 gr. ſuſpendi maſſas easdem, et notaui, vti antea:

Poſt Temp.	cal. aq.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	33½	0	33½	0
5	36½	3	38	4½
16	39½	5½	46	12½
37	46	12½	55	21½
54	50½	17	59	25½
65	53	19½	61½	28
75	55	21½	63	29½
105	59	25½	66	32½
122	61	27½	66	32½
134	64½	31	66	32½

Experim.

Experim. V.

§. 5. In niue temperici 33½ gr. locaui ſimul vas cum argento viuo, et aliud ſimile cum ſpiritu vini, cum Thermometris in iis ad eandem profunditatem immerſis: Spiritus vini ſtagnabat ad eandem altitudinem in vaſe, ad quam argentum viuum ſtagnabat. Obſeruaui, vt antea, in temperie aëris 65 gr.

Poſt T.	cal. Sp. V.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	61	0	61	0
5	53	8	47	14
10	48	13	40	21
15	45⅔	15⅓	37	24
20	44	17	35	26
25	42⅕	18⅘	34	27
30	41	20	33½	27½
35	40	21	33½	27½
40	39	22	33½	27½
45	38	23	33½	27½
50	37	24	33½	27½
55	36½	24½	33½	27½

Experim. VI.

§. 6. Vtrumque vas ex niue extraxi, et mercurium ita calefeci, vt eandem cum Sp. V. haberet temperiem 36 grad. et in temperie aëris 65. grad. obſeruaui vt antea

Poſt Temp.	cal. Sp. V.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	36	0	36	0
5	39	3	40	4
17	42	6	46	10

22	44	8	49	13
32	47	11	52½	16½
43	50	14	55	19
57	52	16	56½	20½
68	54	18	58	22.

Experim. VII.

§ 7. Immerſi aquae calidae ſuperante 150 gr. vas cum Sp. V. et obſeruaui in temperie aëris 65 gr.

Poſt T.	cal. Sp. V.	incr.	Poſt Temp.	cal. Sp. V.	incr.
0 min. pr.	61	0	9	126	65
3	94	33	11	129	68
6	108	47	12	130	69
8	122	61			

Experim. VIII.

§. 8. Spiritum Vini rectificatiſſimum, cuius grauitas ſpecifica ad grauitatem ſpecificam aquae erat vti 861 ad 1000, infudi ad praedictam (§. 1.) altitudinem, et Thermometro immerſo, in temperie aëris 63 graduum obſeruaui, vaſe niui immerſo, cuius temperis 33 gr. erat.

Poſt Temp.	cal. Sp. V. R.	decr.
0 min. pr.	61	0
1	59	2
3	57	4
4	55	6
6	53	8
8½	51	10
10	49	12
14	46	15

21 -	- - - 43 -	- - 18
28 -	- - - 41 -	- - 20
41 -	- - - $38\frac{2}{5}$ -	- - $22\frac{3}{5}$
46 -	- - - $37\frac{2}{5}$ -	- - $23\frac{3}{5}$
56 -	- - - 36 -	- - 25.

Experim. IX.

§. 9. Extraxi vas ex niue, et obſeruari in temperie aëris 63 gr. vt antea

Poſt Temp. - -	cal. Sp. V. R - -	incr.
- - 0 m. p. - -	36 - - - -	0
- - 4 - - -	37 - - - -	1
- - 10 - - -	40 - - - -	4
- - 33 - - -	50 - - - -	14
- - 46 - - -	53 - - - -	17
- - 90 - - -	$58\frac{1}{2}$ - - - -	$22\frac{1}{2}$.

Experim. X.

§. 10. Immerſi aquae calidae 150 gr. ſuperanti vas cum Spiritu V. rectificatiſſimo in temperie aëris 63 gr. et notaui

Poſt Temp. - -	cal. Sp. V. R. - -	incr.
- - 0 m. p. - -	62 - - - -	0
- - 2 - - -	83 - - - -	21
- - 4 - - -	94 - - - -	32
- - 5 - - -	108 - - - -	46
- - 8 - - -	124 - - - -	62
- - 10 - - -	130 - - - -	78.

Experim. XI.

§. 11. Immerſi vas cum Petroleo limpidiſſimo eiusdem voluminis cum argento viuo, et ſimul alterum vas cum argento viuo aquae fruſtulis glaciei ad gr. 33 frigefactae, et obſeruaui in temperie aëris 64 gr.

Poſt Temp.	cal. Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	57	0	57	0
10	48	9	38	19
15	$43\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	$34\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$
20	40	17	$33\frac{2}{3}$	$23\frac{1}{3}$
25	38	19	$33\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$
30	37	20	33	24
35	$36\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	33	24
40	36	21	33	24
65	$35\frac{3}{5}$	$21\frac{2}{5}$	33	24
75	$35\frac{4}{5}$	$21\frac{1}{5}$	$33\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$.

Experim. XII.

§. 12. Extraxi ex aqua vtrumque vas, et deterſis parietibus ſuſpendi, vt tantummodo ab aëre temperiei 64 gr. contingeretur, et notaui:

Poſt Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	$35\frac{4}{5}$	0	$33\frac{1}{2}$	0
5	38	$2\frac{1}{5}$	39	$5\frac{1}{2}$
10	$41\frac{4}{5}$	$6\frac{2}{5}$	42	$8\frac{1}{2}$
15	$45\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{18}$	45	$11\frac{1}{2}$
20	$47\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{18}$	47	$13\frac{1}{2}$
25	50	$14\frac{1}{5}$	50	$16\frac{1}{2}$.

Experim.

Experim. XIII.

§. 13. Tranſtuli in medium aëreum frigidius vtramque maſſam, et obſeruaui in temperie aëris $33\frac{1}{2}$ gr.

Poſt Temp.	cal. Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	65	0	65	0
26	54	11	$51\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
65	40	25	40	25
159	33	32	$33\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$.

Experim. XIV.

§. 14. Ex temperie aëris 30 gr. portaui adparatum in temperiem 63 gr. et obſeruaui.

Poſt Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	30	0	30	0
5	$36\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	38	8
18	40	10	42	12
26	$45\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	46	16
70	58	28	57	27.

Experim. XV.

§. 15. Aquae calidae gr. 150 + immerſi vaſa cum Mercurio et petroleo ſimul cum temperies vtriusque eſſet 61 gr. et obſeruaui in temperie aëris 64 gr.

Poſt. Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	61	0	61	0
3	96	35	131	70
6	116	55	144	83
9	$142\frac{1}{2}$	$81\frac{1}{2}$	150	89
12	144	83	147	86.

Experim.

Experim. XVI.

§. 16. Extraxi ſimul ex aqua vas vtrumque, et ſuſpendi in aëre temperiei 62 gr. et obſeruaui.

Poſt Temp.	cal Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	145	0	145	0
5	128	17	127½	17½
10	119	26	119	26
15	111	34	111	34
20	104	41	104½	40½
25	98	47	99	46
30	92⅓	52⅔	93	52
40	88	57	86	59
45	85	60	83	62
70	73½	71½	72	73
80	71½	73½	70	75.

Experim. XVII.

§. 17. Vaſi vni aquam alteri petroleum infudi, ita, vt volumina rurſus eſſent aequalia, et Thermometris ad eandem profunditatem immerſis vtrumque vas immiſi aquae calidae temperie antea eadem vtrique fluido tributa, et obſeruaui in temperie aëris 65 gr.

Poſt Temp.	cal. aq.	incr.	cal. Petr.	incr.
0 min. pr.	79	0	79	0
2	98	19	104	25
6	101½	22½	106½	27
7	102	23	107	28
12	102⅓	23⅓	106⅓	27⅓.

Experim.

Experim. XVIII.

§. 18. Eadem vaſa ſuſpendi in aëre temperiei 68 gr. et obſeruaui

Poſt Temp.	cal. aq.	decr.	cal. Petrol.	decr.
0 min. pr.	102	0	105	0
4	99	3	101	4
10	95	7	95½	9½
15	92	10	91½	13½
21	89½	12½	87½	17½
25	88	14	85½	19½
35	81⅘	20⅕	78½	26
55	77	25	74	31
69	74⅕	27⅘	72	33
90	72	30	70½	34½
110	70½	31½	70	35
120	70	32	69½	35½.

Experim. XIX.

§. 19. Oleum Terebinthinae pari ratione examinaui, et immerſi cum argento viuo aquae calidae, et obſeruaui in temperie aëris 66 gr.

Poſt Temp.	cal. ol. Tereb.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	76	0	74	0
3	84	8	89	15
4	86	10	93	19
5	89½	13½	94	20
9	104	28	110	36.

Experim. XX.

§. 20. Extraxi vaſa ex aqua, et ſuſpendi in aëre 66 gr. et obſeruaui vti antea

Poſt Temp.		cal. ol. Tereb.		decr.		cal. ☿rii		decr.
0	--	107	--	0	--	$107\frac{3}{5}$	--	0
5	--	104	--	3	--	102	--	$5\frac{3}{5}$
14	--	95	--	12	--	$94\frac{1}{2}$	--	$13\frac{1}{10}$
19	--	90	--	17	--	90	--	$17\frac{3}{5}$
28	--	87	--	20	--	87	--	$20\frac{3}{5}$
36	--	86	--	21	--	84	--	$23\frac{3}{5}$
45	--	83	--	24	--	82	--	$25\frac{3}{5}$
50	--	82	--	25	--	$80\frac{2}{5}$	--	$27\frac{1}{5}$
71	--	78	--	29	--	$76\frac{1}{2}$	--	$31\frac{1}{10}$
84	--	76	--	31	--	75	--	32,6.

Experim. XXI.

§. 21. Apparatum niui cum ſale mixtae immerſi, et obſeruaui, deſcendiſſe Thermometra ſimul

oleum Tereb.		Mercurius
a gr. 64 ad 56	- - -	a gr. 64 ad 45
a gr. 56 ad 45	- - -	a gr. 45 ad 34
a gr. 45 ad 31	- - -	a gr. 34 ad 22.

Experim. XXII.

§. 22. Oleum lini pariter examinaui in niue temperiei 33 gr. et in temperie aëris 62 gr. obſeruaui

Poſt Temp.		cal ol. lini		decr.
0 min. pr.	- -	61	- -	0
5 - -	- -	52, 4	- -	8, 6

10

10	- - - -	47, 2	- - 13, 8
15	- - - -	43, 2	- - 17, 8
20	- - - -	39, 6	- - 21, 4
25	- - - -	38, [illegible]	- - 23,
32	- - - -	37,	- - 24,
35	- - - -	36, 6	- - 24, 4
40	- - - -	35, 8	- - 25, 2.

Experim. XXIII.

§. 23. Extraxi ex niue vas, et obſeruaui in temperie aëris 62 gr.

Poſt Temp. - -	cal. ol. lini - -	decr.
0 min. pr. - -	35 - -	0
4 - - - -	37 - -	2
20 - - - -	44 - -	9
33 - - - -	48, 6 - -	13, 6
40 - - - -	50, 5 - -	15, 5
43 - - - -	51, - -	16
54 - - - -	53, 4 - -	18, 4
64 - - - -	55 - -	20,
75 - - - -	56, 2 - -	21, 2.

§. 24. Ex his experimentis videre eſt :

1) Argentum viuum in medio aëre denſiori aqueo vel etiam in niue, frigidiori, maiora decrementa caloris pati, quam a) aqua, Exp. III. b) Spiritus vini ordinarius, Exp. V. c) petroleum, Exp. XI. d) oleum Terebinthinae, Exp. XXI. e) Spir. vin. rectificatiſſimus, Exp. VIII. coll. Exp. V. f) oleum lini, Exp. XXII. coll. Exp. XI. quia ferme aequalia decrementa cum petroleo in medio aqueo patitur.

 2) Idem

2) Idem caloris incrementa maiora capere in medio aqueo calidiori, quam a) petroleum, Exper. XV. b) oleum Terebinthinae, Exp. XIX. c) Spiritus vini ordinarius, Exp. VII. coll. Exper. XV. cumque petroleum maiora incrementa caloris acquirat quam aqua in medio aqueo, Exper. XVII. quod minora in eodem capit, quam argentum viuum, etiam d) argentum viuum maiora incrementa caloris acquirere quam aqua, et tandem maiora quam e) Spiritus vini rectificatiſſimus, Exper. X. coll. Exper. VII. et Exper. XV.

3) Incrementa et decrementa caloris Mercurii, petrolei et decrementa caloris olei Terebinthinae, petrolei et Mercurii in aëre eſſe ferme aequalia, Exp. XII. XIII. XIV. XX. paruae enim diſcrepantiae plurimam partem diuerſitati Thermometrorum et vaſorum, quae licet exigua admodum fuerit, tamen nonnihil efficere potuit, et diuerſitati aliarum circumſtantiarum minimarum, quae in eiusmodi experimentis non tolli in totum poteſt, forte tribuendae ſunt. Aliqualem tamen differentiam adeſſe, et Mercurium motui a calore minus reſiſtere probabiliter quam dicta fluida infra patebit.

4) Aquae vero et Spir. V. ordinarii decrementa et incrementa caloris etiam in aëre eſſe minora decrementis et incrementis caloris argenti viui, Exp. I, II, VI. conſequenter etiam minora decrementis et incrementis Petrolei (coll. n. 3), etiam olei lini decrementa in aëre eſſe minora decrementis petrolei et conſequenter Mercurii, Exp. XXIII. coll. Exp. XX.

§. 25. Haec conſectaria licet videantur ex experimentis ſatis patere, alia ratione tamen confirmare volui, vt

vt nullum dubium diuerſitas Thermometrorum ſaltim et vaſorum iniicere poſſet. Obſeruaui ſaepius, per ſatis longum temporis interuallum, temperiem in Muſeo eandem, vt Thermometrum nullam mutationem indicaret; hinc finem ſequenti ratione obtinere putaui.

Experim. XXIV.

§. 26. Elegi 1) vas vitreum cylindricum tenuium parietum, et ei infudi ad certam altitudinem fluidum examinandum (altitudo haec erat 11 lin. Lond. Diameter 30 lin. ſuperficies integra fluidi in vaſe ſtagnantis 24″, 80‴ □ et volumen 7″ 870‴ ⊡.)

2) Thermometri bulbo fluido immerſo caleſeci vas cum fluido in aqua calida vsque ad gradum 130, hoc facto.

3) Extraxi ex aqua vas, et ſuſpendi, ita, vt ſolum ab aëre 68 graduum contingeretur, et ſuperficies fluidi ſuperior et fundi eſſent parallelae.

4) Cum Mercurius Thermometri haereret circa gradum 128, incepi notare tempus ab initio obſeruationis, et gradum Thermometri vsque dum calor fluidi examinandi decreuiſſet ad gradum centeſimum.

5) Vno fluido examinato ſimili ratione reliqua examinaui in eodem vaſe, eodem Thermometro immerſo, cuius quilibet gradus diuiſus erat in 5 partes, eratque aequalis $\frac{3}{4}$ partibus lin. Lond.

6) Paulo maiorem altitudinem conceſſi argento viuo, quam reliquis fluidis examinandis, cuius rei rationem infra dabo.

Obſeruationes cum Mercurio, oleo Terebinthinae,

aqua, Spiritu vini ord. ſequenti tabula comprehendo, vbi prima columna tempora ab initio obſeruationis praeterlapſa in minutis primis exhibet, et reliquae columnae fluidorum ſupra poſitorum graduus caloris poſt definitum tempus reſiduos.

Poſt T.	cal. ☿rii	cal. ol. Ter.	cal. aq.	cal. Sp. V. o.
0 m. p.	128	128	128	128
2′	123	124, 2	124	125
4′	119,4	120	120	121, 5
7′	114	114, 6	115	115, 8
9′	111	111, 6	112	112, 6
14′	104	104, 4	105, 8	105, 6
17′	100,4	100, 4	102, 6	102, 4
17′ $\frac{35}{60}$	100,	100, 28	102,	101, 85
17′ $\frac{50}{60}$		100		
18′ $\frac{35}{60}$			100	
19′ $\frac{10}{60}$				100.

§. 27. Sunt ergo decrementa aequalibus temporibus ab initio obſeruationum, vt ſequens tabula indicat.

Poſt Temp.	decr. ☿rii	decr. ol. Ter.	decr. aq.	decr. S. V.
2 min. pr.	5, 0	3, 8	4, 0	3, 0
4	8, 6	8, 0	8, 0	6, 5
7	14, 0	13, 4	13, 0	12, 2
9	17, 0	16, 4	16, 0	15, 4
14	24, 0	23, 6	22, 2	22, 4
17	27, 6	27, 6	25, 4	25, 6
17, $\frac{35}{60}$′	28, 0	27, 72	26,	26, 15

§. 28. Alio tempore ſal cinerum Clau. ſolutum, Spiritum vini rectificatiſſimum, cuius grauitas ſpecifica ad grauitatem ſpec. aquae erat vti 801 ad 1000, et oleum

lini

lini examinaui in temperie aëris 65, 3 gr. et inueni.

Poſt. Temp.	Sp. V. R. cal.	Sal. cin. cl. ſol.	ol. lini
0 min. pr.	128	128	128.
2	123, 8	123, 8	127, 15
4	119, 8	120, 4	124, 8
7	113, 6	115, 6	120, 2
9	110,	112, 6	117,
14	101, 6	106	109, 6
15	110, 4	105	108
$15\frac{12}{65}$	100		
$19\frac{51}{65}$	-	100	102
$21\frac{20}{65}$	-	-	100.

§. 29. Decrementa caloris hinc aequalibus temporibus ab initio obſeruationum praeterlapſis erant, vti ſequens tabula indicat:

Poſt Temp.	decr. cal. S. V. R.	Sal. cin. cl. ſol.	ol lini
2 min. pr.	4, 2	4, 2	0, 85
4	8, 2	7, 6	3, 20
7	14, 4	12, 4	7, 80
9	18, 0	15, 4	11, 00
14	26, 4	22, 0	18, 40

Si comparare volumus haec decrementa cum decrementis (§. 27), debemus haec reducere ad ſtatum aëris temperiei 68 gr. quia decrementa temporibus paruis ſunt in ratione differentiarum, inter temperiem fluidi et aëris, facilis erit reductio. Mutatur tali ratione tabula praecedens in ſequentem.

Poſt Temp.	cal. decr. S. V. R.	Sal. cin. cl. ſol.	ol. lini
2 min. pr.	4, 02	4, 02	0, 81
4,	7, 83	7, 22	2, 67

7,

7,	-	--	-- 13, 72	--	11, 78	-- 7,07
9,	-	--	-- 17, 12	--	14, 63	-- 10,11
14,	-	--	-- 25, 01	--	20, 85	-- 17,11

Haec tabula poteſt comparari cum tabula decrementorum calorum fluidorum tabulae §. 27. et apparet, decrementa initialia Mercurii etiam decrementis initialibus ſpiritus vini rectificatiſſimi, ſalis cinerum clauellatorum ſoluti, et olei lini eſſe maiora, ſal cin. cl. ſolutum tardius quam praedicta fluida, oleum lini vero etiam tardius quam ſal cinerum caluel. ſolutum refrigerari.

§. 30. Si reſpicio ad ea, quae *Tom. I. Nov. Comment.* in inquiſ. in legem decr. caloris §. 22. coll §. 25. dixi, eſſe ſcil. in homogeneis corporibus (poſitis ſuperficiebus integris vti S ad s, voluminibus vti V ad v, differentiis inter temperiem fluidi et aëris vti A ad a, decrementis aut incrementis initialibus vti B ad b) $B : b = \frac{SA}{V} : \frac{sa}{v}$, et decrementa et incrementa poſt tempus n vti $\frac{B(A-B)^{n-1}}{A^{n-1}}$ ad $\frac{b(a-b)^{n-1}}{a^{n-1}}$. Hoc inde fit, quia in corporibus homogeneis ratio pororum ad materiam conſtantem ſemper eſt eadem, multitudo etiam pororum ad multitudinem particularum ſe paratarum eandem habet rationem. Deinde per ſuperficiem cuiusuis corporis materia aequaliter diſperſa eſt, hinc pendet definita quaedam ad certam quantitatem caloris recipiendam et perdendam proprietas, vt decrementa et incrementa ſint in praedicta ratione, ita, vt, quo minor quantitas materiae mouendae ſit, et quo liberior ad eam acceſſus, vel ex ea exitus, id eſt, quo maior ſuperficies, eo maius ſit incrementum caloris et decrementum.

§. 31.

§. 31. In corporibus heterogeneis:

(a) Ratio pororum ad materiam conſtantem non eſt eadem, neque multitudo pororum in vno corpore aequalis eſt neceſſario multitudini pororum in alio, ſi vel maxime denſitates ſint eaedem, et volumina Geometrica eadem, et inde pendere poteſt infinita varietas, et multae diſcrepantes proprietates, quae efficere valent, vt corpora calori magis vel minus obnoxia reddantur.

(b) Corpora heterogenea, quae denſitate differunt, ſub aequalibus voluminibus Geometricis habent quantitates materiae conſtantis in ratione denſitatum. Si ſuperficies etiam ſunt aequales, ſuperficies materiae conſtantis etiam poſſunt eſſe in ratione denſitatum, hoc caſu materia mouenda actione ignis vnius corporis erit ad materiam mouendam alterius, vt ſuperficies illius ad ſuperficiem huius. Si s et v ſuperficiem et volumen materiae conſtantis indicant, erunt $\frac{s}{v}$ hoc caſu aequales, ſi $\frac{S}{V}$ ſunt aequales.

(c) At poſſunt voluminibus et ſuperficiebus Geometricis aequalibus ſuperficies materiae conſtantis a ratione denſitatum corporum recedere. Poteſt corpus ita excauatum eſſe canaliculis, vt per ſuperficies internarum etiam partium ignis allapſus particulas interiores corporum ad motum concitare poſſit, vel in corpore calido per talem ſuperficiem etiam medium frigidius verſus tendere, et illud afficere, vt ita corpus eo maiorem quantitatem motus ab igne perdere poſſit, quo maior ei per ſuperficiem maiorem libertas motum ſuum cum medio frigidiori communicandi datur, licet ſuperficies Geometrica non differat a ſuperficie alterius, quod eiusmodi proprietate carere poteſt. Si (1) volumen et ſuperficies Geometrica corporum A et B ponatur aequa-

lis, et (2) vtrumque conſtare certo numero particularum perfecte ſphaericarum minimarum homogenearum primae compoſitionis. Sitque (3 numerus particularum in A $= n$, et in B $= m$; ſit (4) denſitas particularum in A $= \delta$, in B $= d$; ſit (5) volumen ſummae particularum omnium in vtroque corpore $= v$; orientur (6) corpora interſtitiis praedita ex ſphaerulis compoſita, in quorum interiora materia ſubtilis ignis penetrare, et particulas commouere, ex iisque iterum liberis viis diſcedere poterit; eritque (7) vnius particulae volumen in A $= \frac{v}{n}$, et vnius particulae volumen in B $= \frac{v}{m}$; hinc (8) ſuperficies particulae in A erit vti $\frac{v^{2:3}}{n^{2:3}}$, et in B vti $\frac{v^{2:3}}{m^{2:3}}$; erit ergo (9) ſuperficies particulae in A ad ſuperficiem particulae in B vti $m^{2:3} : n^{2:3}$, conſeq. (10) ſuperficies omnium particularum in A ad ſuperficiem omnium in B vti $nm^{2:3} : mn^{2:3}$. Cum (11) quantitas materiae mouendae in A ſit ad quantitates materiae mouendae vel calefaciendae in B $= \delta : d$, quia volumina ſunt aequalia, erunt ſuperficierum particularum ſummae diuiſae per quantitates materiae vti $\frac{nm^{2:3}}{\delta} : \frac{mn^{2:3}}{d}$; Si ergo (12) $nm^{2:3}$ reſp. $mn^{2:3}$ maior ponitur, quam δ reſpectu d, erit etiam decrementum vel incrementum caloris, ſi caetera ſint paria in A maius quam in B. Ponatur (13) $\delta : d \lesseqgtr f : 1$, et $nm^{2:3} : mn^{2:3} = f : 1$, erit (14) $nm^{2:3} = f\,mn^{2:3}$, hinc (16) $\frac{n}{m} = f^3$; hinc erit (15) multitudo particularum in B ad multitudinem particularum in A vti 1 ad f^3; et (16) magnitudo vnius particulae in A ad magnitudinem vnius parti-

particulae in B vti 1 ad f^3, diameterque particulae ad diametrum particulae in B $=$ 1 : f. Conſequenter in rariori corpore ſub his conditionibus diameter particulae ſuperare debet diametrum particulae in denſiori magis, quam denſitas denſioris denſitatem rarioris, ſi decrementum et incrementum caloris denſioris corporis maius eſſe debet decremento vel incremento caloris rarioris corporis. Sint denſitates vti 14 ad 1, et f debebit eſſe $>$ 14, conſeq. diameter particulae rarioris corporis plus quam quatuordecies maior eſſe debet diametro particulae denſioris corporis.

(d) Poteſt etiam denſitas ſuperficiei materiae cum ſuperficie externa Geometrica coincidentis denſitatem totius valde ſuperare. Ob diuiſibilitatem materiae inaſſignabilis limitationis non dicam in infinitum progredientem, quantitas materiae parua per volumen finitum ita diſtributum concipi poteſt, vt pori ſint qualibet extenſione dabili minores, datoque volumine materiae conſtantis et volumine integro item multitudine pororum poteſt extenſio pori inueniri. Sit volumen integrum V, volumen materiae v, erit volumen pororum $= V - v$; ſit multitudo pororum $= n$, erit volumen vnius pori $= \frac{V - v}{n}$; ſi porus concipitur cubicus ſex lateribus quadratis conſtantis materiae veſtitus, et V ponitur $=$ 1001‴ ◻; et deinde $n = 1^{IV}$, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, erit extenſio pori millies trillioneſima pars lineae cubicae, et $\left(\frac{V - v}{n}\right)^{1:3}$ ſiue radix cubuli vna decies millioneſima pars lineae. Corpus vero ex talibus cubulis conſtructum habebit denſitatem ſuperfi-

 ciei

ciei maximam, quam habere poteſt, denſitas vero totius erit ad denſitatem maximam poſſibilem, vt volumen conſtantis materiae ad volumen integrum = 1 . 1001; hinc denſitas totius corporis erit ad denſitatem ſuperficiei vt 1 ad 1001. Vtrum in natura talia corpora dentur definire non valemus. Facile vero patet, talia corpora, ſi darentur, admodum cohaerentia eſſe debere, et dura, talemque ſtructuram fluidis prorſus non conuenire, quibus ſphaerica magis reſpondet. Ab hac denſitate maxima poteſt denſitas ſuperficiei plus vel minus recedere, quatenus plus vel minus porulis ſuperficies diſtinctus eſt. Hinc ratio ſuperficiei conſtantis materiae ad quantitatem materiae ſuperficie inuolutae infinitae varietati obnoxia eſt. Patet hinc, inanem eſſe laborem ex figura diuerſa particularum, et peculiari ſtructura totius rationem diuerſitatis caloris petere et definire, cum minimae particulae ſint ſupra inveſtigationem noſtram, dum ſenſus noſtros fugiunt.

§. 32. In fluidis, quae probabiliter ſphaericam figuram habent, diuerſitas in calore recipiendo et perdendo forte pendet a magnitudine particularum homogenearum primae compoſitionis; de qua (§. 31, (c)) ſcripſi. Si hoc obtineret, poſitis decrementis initialibus B : b, corporum A et B voluminibus Geometricis aequalibus, et multitudine particularum in corpore A, quod decrementum B patitur ad multitudinem particularum in corpore, B, quod decrementum b patitur, vti $n : m$, et denſitatibus vti $\delta : d$, erit $\frac{n m^{2:3}}{\delta} : \frac{m n^{2:3}}{d} = B : b$ (§. 31), hinc $m : n = d^3 b^3 \delta^3 : B^3$; hinc multitudo particularum in B ad multitudinem particularum in A $= d^3 b^3 : \delta^3 B^3$, et magnitudo

tudo particulae in A ad magnitudinem particulae in B $= d^3 b^3 : \delta^3 B^3$; diameter vero particulae in A ad diametrum particulae in B $= db : \delta B$. i. e. in ratione compoſita denſitatum et decrementorum initialium reciproca. Hinc diameter particulae argenti viui eſſet ad diametrum particulae aqueae $= 1:17$ circiter; quia (§. 27) $B = 5$, $b = 4$, $\delta = 14$, $d = 1$; ad diametrum particulae olei Terebinthinae vti $1:19$ ferme, ad diametrum particulae Spiritus V, vti $1:26$ ferme. Particulam vero aquae minimam homogeneam primae compoſitionis minorem eſſe particulis ſimilibus Spiritus vini et olei Terebinthinae nullum eſt dubium, quia hae ex aqua et aliis conſtitutiuis compoſitae ſunt. Quamcunque tamen rationem habeant particulae et ſuperficies particularum, et qualiscunque ſit $\frac{s}{v}$, B et b, poſitis A et a aequalibus vti (§. 26), experientia definiri poſſunt, et erunt poſt tempus n in ratione $B(a-B)^{n-1}$ ad $b(a-b)^{n-1}$. Ponatur $B > b$, erit $(a-B)^{n-1} < (a-b)^{n-1}$. Hinc poſt aliquod tempus debet eſſe $(a-B)^{n-1} : (a-b)^{n-1} = b : B$, et tunc decrementa debent eſſe aequalia, ſi omnes reliquae conditiones praeter differentias inter temperiem fluidi et aëris manent pares. Poteſt hoc tempus n inueniri ex aequatione, $B(a-B)^{n-1} = b(a-b)^{n-1}$, et erit $n = \frac{lB - lb}{l(a-b) - l(a-B)} + 1$. Ita vero oleum Terebinthinae in 27 minutis primis, et aqua in 24 circiter, idem decrementum cum Mercurio pati deberent, quod ſec: experientiam in 17 ad 19 minutis fit. Spiritus V. poſt 28. min. pr. cum Mercurio eandem temperiem acquirere deberet, quod in 19 min. fit. Spiritus V. et aqua deberent in 34 minutis ad eandem temperiem peruenire,

 quod

quod in 9 ad 14 minutis ſit. Aqua et oleum Terebinthinae 31 minuto praeterlapſo vnius temperici eſſe deberent, quod quarto iam minuto contingit. Ratio huius receſſus a lege pendet ab euaporatione ſaltem ex parte; Aqua Spiritus V. oleum Terebinthinae ob euaporationem $\frac{s}{v}$ accipiunt maius, conſeq. etiam $\frac{s}{v}$ maius ſit (§. 31 (b)), quam argentum viuum habet, cuius volumen manet conſtans. Quam ob rem Spiritus vini etiam debet plus euaporare in eadem temperie quam aqua, et aqua plus quam oleum Terebinthinae. Diuerſimode etiam expanduntur fluida, hinc ratio magnitudinis particularum minimarum homogenearum primae compoſitionis mutatur (§. 31 (c)). Ex his ſimul patet, reliqua fluida, ſi non paſſa eſſent euaporationem, ſicuti argentum viuum non paſſum eſt, adhuc minus decrementum aequalibus temporibus acquiſiuiſſe. Intelligitur etiam, cur in experimentis altitudinem Mercurio in vaſe conceſſerim maiorem, quam reliquis fluidis (§. 26 (6)), ita $\frac{s}{v}$ in reliquis fluidis maior reddebatur, et hinc decrementum in reliquis fluidis ex hac cauſa debuit ſieri maius, quam factum fuiſſet, ſi $\frac{s}{v}$ in reliquis fluidis manſiſſet aequalis $\frac{s}{v}$ in Mercurio. Ergo minora adhuc decrementa paſſa fuiſſent, ac re vera paſſa ſunt, ſi $\frac{s}{v}$ in illis fuiſſet aequalis $\frac{s}{v}$ in Mercurio. Hinc confirmatur, maius decrementum caloris pati Mercurium quam dicta fluida. Vt rem vlterius ſtabilirem, conceſſit mihi primarius pharmacopoeiae praefectus *Modelius* pro ſua erga me amicitia, et ad ſcientias promouendas deſiderio, vt in laboratorio cum maſſa ☿rii 56 libr. ſequentia experimenta inſtituerem.

Experi-

Experim. XXV.

§. 33. Maſſam Mercurii 56 librarum infudi vaſi cupreo, et notaui in margine, ad quam altitudinem argentum ſtagnaret, deinde immerſi Thermometrum, et notaui temperiem. Hoc facto vas igni in furno anemio admouebatur, et ſimul notabatur tempus, obſeruataque eſt maſſa dicta a temperie 44 gr. in caleſcere quinque minutis primis ad gradum 242. Vaſe cupreo frigefacto, loco Mercurii infudi aquam ad praedictam notatam altitudinem, et notaui pariter gradum temperiei aquae, qui erat 44 gr. admouique vas eidem igni notato rurſus tempore, et creuit calor nouem minutis a gr. 44. ad 212.

Experim. XXVI.

§. 34. Maſſam ☿rii 56 libr. calefactam infudi doliolo ligneo corio intus veſtito, et immiſi bulbum Thermometri per foramen in ſuperiori parte corii factum in temperieque aëris 45. gr. obſeruaui ſingulis horis temperiem maſſae, vt ex ſequenti tabula videre licet, vbi appoſitum quinam gradus ſecundum calculum prodeant?

Poſt Temp.	cal. ☿rii obſ.	cal. ☿rii per calc.
0 hora	120	120
1	97, 6	97, 6 per obſeru. et hyp.
2	81, 8	82 3
3	71, 0	70, 8
4	63, 8	63 1
6	54, 6	53, 9
9	48, 4	48.

§. 35. Si decrementum poſt $\frac{1}{n}$ temporis ponitur $a-x$, et a differentia initialis temperiei argenti viui et

aëris

aëris, differentiaque inter temperiem eiusdem et aëris poſt tempus $n = c$, erit per aequationem $\frac{x^n}{a^{n-1}} = c$, $lx = \frac{lc + (n-1)la}{n}$; habemus poſt horam vel 6. 10 min. pr. per obſeruationem (§. 34) $c = 97,6 - 45,0 = 52,6$, et $a = 1200 - 450 = 750$ et $n = 6$; conſequenter temperies poſt 10 min. pr. debet eſſe 115. 6, et decrementum poſt idem tempus $= 44$. Ex his elementis calculus appoſitus eſt ortus, cuius mira harmonia cum obſeruationibus ſatis demonſtrat legis veritatem, et ſimul ratio facile perſpicitur, cur Mercurius ſe legi exactius conformet quam aqua ex (§. 32). Notandum etiam circa Exper. XXVI. ſi maſſa non inuoluta fuiſſet corio, et craſſities parietum dolioli lignei minor fuiſſet, quod celerius decreuiſſet temperies probabiliter.

Vt compararem decrementa caloris magnae maſſae Mercurii cum decrementis caloris magnae maſſae Aquae, ſequens adhuc inſtitui Experimentum.

Experim. XXVII.

§. 36. 1) Elegi vas ligneum coni truncati figuram habens, quod capiebat quatuor libras, et $\frac{1}{8}$ partem aquae, quae idem volumen occupabat, ac argentum viuum Exp. XXVI. quia grauitas ſpec. eius ad grauitatem ſpecificam aquae inuenta erat, vti 13570 ad 1000. Superficies vero aquae integra erat paulo maior in vaſe ligneo conico, ac ſuperficies argenti viui in dolio, quae ſuperficiem ſphaericam propius accedebat, erat haec ad illam ferme vti 38537 : 41200. Hinc $\frac{s}{v}$ in Mercurio debebat eſſe minor, quam $\frac{s}{v}$ in aqua. Et hinc decrementa caloris aquae

ex hac cauſa deberent ſub eadem A maiora eſſe, quam decrementa in Mercurio, ſi ergo inueniantur ſaltem aequalia, rurſus patebit etiam ex his Experimentis, decrementa argenti viui eſſe maiora, quam aquae ſub iisdem $\frac{SA}{V}$.

2) Calefeci aquam, et impleui vas, Thermometrumque ei immiſi, poſtea obſeruaui in temperie aëris 34 gr. 1) tempus decreſcentis caloris, 2) temperies poſt notata tempora reſiduas, 3) appoſui ſimul calculum, poſita temperie aëris 34 gr. et 4) calculum, poſita temperie aëris 45. gr. vti Exper. XXVI. erat.

Poſt Temp.	cal. aq. obſ.	calc. ſub. 34 gr. aëris	calc. ſub 45 gr. aëris
0 min. pr.	169, 6		
5	166, 0		
75	125, 4	126, 4	128, 3
0 -90		117, 5	121, 8
105	111, 6	111,	115, 9
135	101, 3	99, 5	102, 1
1)150			100, 6
165	92, 3	89, 7	96, 3
2)210			85, 3
225	79	74, 4	
3)270		65, 7	74, 3
4)330		56, 9	66, 1
405	53	53, 3	59, 1
6)450		49, 3	56, 1
465	$47\frac{1}{2}$	45, 1	55, 2
600	39, 9	39, 3	49, 9
9)630		38, 5	49, 2
690	36, 3.		

Si ponitur temperies aëris 45 gr. inuenitur decrementum poſt 5 min. pr. 3, 3 gr. temperies poſt idem tempus 166, 3 et poſt 630 min. pr. 49, 2 talique ratione maior temperie Mercurii poſt idem tempus; decreuit enim calor Mercurii a gr. 120 ad gr. 48, 2, nouem horis, et aqua ſub eadem temperie aëris deberet 9 horis a gr. 121 ſec: calculum peruenire ad temperiem 49, 2; hinc minus derementum pati quam Mercurius. Id confirmatur etiam poſt reliqua tempora, licet (1) euaporatio auxerit $\frac{s}{v}$ aquae, et conſeq. decrem. (2) ſuperficies aquae maior fuerit ab initio, et (3) maſſa aquae magis expoſita, quam maſſa Mercurii corio inuoluti.

Tab. VI. Fig. 1. §. 37. Vt commode Experimenta eiusmodi inſtitui poſſint, fiat (1) vas cupreum A B C D cuius fundum C B ſit planum. (2) Ex vtraque parte in locis A et D ſint aptatae columnae A E et D F, quae transuerſo parallelepipedo E F coniunctae ſint. 3) Parallelepipedum E F ſit in diſtantiis a columnis A E et D F aequalibus excauatum ſecundum ſitum verticalem columnis parallelum, vt recipi poſſint commodae caudae ON et PQ Thermometrorum ſimilium et aequalium IN et LP, et in cauitatibus deprimi et eleuari, cochleisque S et T eas ad cauitatum latera apprimentibus firmari. 4) Vaſa vitrea I et L ſimilia et aequalia, tenuium ſatis parietum, retortis oris praedita recipiantur ab annulis ligneis, qui bacillis *c d*, *a b*, *e f*, *g h* cum tabulis Thermometrorum coniuncti ſint, vt vaſa I et L eleuatis thermometris eleuari, et depreſſis Thermometris deprimi poſſint.

Vaſi

Vaſi cupreo poteſt aqua infundi, et totus apparatus furno anemio UWVX imponi, vt ebulliente aqua vaſa examinandis fluidis plena illi immergi poſſint.

Poteſt etiam apparatus a furno tolli, et in commodo ad obſeruandum loco poni, ſi decrementa caloris obſervanda ſunt.

Loco vitreorum vaſorum poſſunt etiam lapidea adhiberi, quae vehementem et ſubitaneam temperiei mutationem facilius ſuſtinere valent.

Facile patet in idem vas cupreum etiam aquam frigidam infundi, et totum apparatum materiae frigorificae admoueri poſſe.

Tandem et Experimentum XXV. commode maxime inſtitui poteſt, Mercurium et aqaam vaſi cupreo ABCD infundendo, et ad ignem furni anemii calefaciendo.

DE RATIONE CALORVM ET RATIONE DENSITATIS RADIORVM DIRECTORVM AD DENSITATEM PER LENTEM REFRACTORVM DEFINIENDA COGITATIONES.

AVCTORE
G. W. Richmanni.

§. 1.

Talia nondum adminicula inuenta eſſe, quibus definiri poſſit, quoties vnus caloris gradus alium ſuperet, et Thermometra noſtra optima Mercurialia indicare, vnum gradum caloris eſſe maiorem altero, et prodere ſolum exceſſus dilatationum argenti viui ſupra volumen eius in Thermometris contenti ſub definita quadam temperie, non vero veram calorum rationem exhibere. notum eſt *Vnde Cel. S. Graveſande in Elem. Math. Phyſ. nouiſſ. edit.* n. 2423. *ſcribit. Non ſatis nota eſt relatio, quae datur inter mutationem in expanſione, et mutationem in calore, vt ex comparatis dilatationibus gradus caloris poſſint conferri inter ſe.* Neque, quantum mihi conſtat, oſtenſum eſt, quomodo denſitas radiorum per lentem refractorum in quauis diſtantia a foco, quouis tempore reſpectu denſitatis radiorum directorum difiniri poſſit. Nemo dubitabit, vtramque inquiſitionem ad perficiendam Philoſophiam naturalem aliquid conferre poſſe. Cum ergo quaedam ſeſe mihi de hiſce rebus cogitanti obtulere, ea cum Societate communicare apud me conſtitui.

§. 2.

§. 2. Per vitra cauſtica radiorum ſolarium efficaciam augeri et maiorem obſeruari in minori, minorem vero in maiori a foco vitri diſtantia notiſſimum eſt. Cumque denſitates radiorum ſolarium vitrum cauſticum penetrantium, et in foco concurrentium ſint in diſtantiis a foco diuerſis, caeteris paribus, ferme in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco, facillimum videri poterit, poſitis caloribus in ratione denſitatum radiorum, inuenire rationem calorum per Thermometra ordinaria et diuerſis expanſionibus liquoris Thermometrici numeros rationi praedictae congruentes aſſignare.

§. 3. Facile tamen patet:

1) Non eodem tempore in diuerſis a foco diſtantiis Thermometra in axe coni radiantis locari et obſeruationes ſimultaneas inſtitui poſſe; vnius enim Thermometri bulbus in axe coni radiantis poſitus interciperet radios, vt ad alterius foco propinquioris bulbum non peruenirent.

2) Succeſſiuas obſeruationes cum vnico Thermometro in diuerſis a foco diſtantiis erroribus occaſionem praebere poſſe, cum radiorum ſolarium efficacia perpetuo mutetur.

3) Cum ipſo vitro et vaporibus multi radii intercipiantur, ita, vt omnes non penetrent, et in foco concurrant, patet, radios naturalis denſitatis cum radiis artificialis denſitatis non facile comparari poſſe. Si enim calor Thermometro radiis ſolis directis expoſito indicatus minor eſt, radii per eandem lentem refracti in eadem diſtantia a foco expanſionem liquoris Thermometrici producunt ſaepius maiorem, quam ſi praedictus calor maior eſt. Hinc *Cel.* S. *Graveſande* in Elem. Math. Phyſ. nouiſſ: edit: n. 2523 ſcribit: „Effectus ſpeculi minuitur, ſi radii

„dii ſolares per aërem his radiis antea calefactum tranſ-„eant, quod demonſtrat, ignem maiori copia in partes „aëreas calidas penetrare, quam in alias„. Ipſam rem, efficaciam nempe radiorum ſolarium, ſi per aërem his radiis antea calefactum tranſeant, poſt vitra cauſtica minui, confirmatam vidi obſeruationibus a *Clariſſ. Lomonoſſovio* inſtitutis, quas mecum humaniter communicauit, dum in diuerſis in axe coni radiantis a lente diſtantiis Thermometri bulbum ad planum ligneum mobile lenti parallelum tempore aeſtiuali et hyemali adplicuit, et gradus Thermometri annotauit, ſimulque Thermometrum directis radiis ſolis oppoſuit, et eius gradus pariter annotauit. Non tamen videtur in culpa eſſe tranſitus ignis in aërem calefactum largior quam in alia corpora, ſed intercipi videntur potius radii a vaporibus inter vitra cauſtica et ſolem haerentibus, vt hinc pauci radii vitra penetrent et in focis concurrant.

§. 4. Anſam dedit. *Cl. Collega*, vt Experimenta ipſius partim repeterem, partim alia ratione inſtituerem, eum tamen ſolum in finem *, vt quilibet indicare poſſit, quantum obſeruationibus eiusmodi tribuendum ſit, et difficulter radios directos cum radiis poſt lentem refractis ita comparari poſſe, aliamque viam ineundam mihi eſſe, ſi eiusmodi Experimentis calorum veram rationem definire vellem.

§ 5. *In diſtantia* 10 *dig. a foco, et* 30 *digit. a lente* locaui Thermometrum A, ita, vt bulbi Thermometrici medium in coni radiantis axi eſſet, et Thermometrum aliud

B in

---

* Obſeruationes has medio menſe Iulii 1750. cum lente plano conuexa inſtitutas communicabo

B in ſitu priori parallelo poſui, vt radii directi non refracti in illud eodem modo inciderent, notauique gradus Thermometri vnius et ſimul alterius.

	Gradus Ther. A	gradus Ther. B	differ.
1)	213	$96\frac{1}{2}$	$116\frac{1}{2}$
2)	$221\frac{1}{2}$	97	$124\frac{1}{2}$
3)	212	$93\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
4)	210	93	117
5)	212	93	119
6)	213	94	119
7)	211	$94\frac{1}{2}$	$116\frac{1}{2}$
8)	214	95	119
9)	216	95	121
10)	215,5	95	120,5
11)	220	$95\frac{1}{2}$	124,5
12)	219	$94\frac{1}{2}$	124,5
13)	217	94	123
14)	210	$93\frac{1}{4}$	$116\frac{3}{4}$
15)	211	$93\frac{1}{2}$	$117\frac{1}{2}$
16)	213	94	119
17)	213	$94\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
18)	212	$93\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
19)	213	$94\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
20)	$215\frac{1}{2}$	$94\frac{1}{2}$	121
21)	219	96	123
22)	222	$96\frac{1}{2}$	$125\frac{1}{2}$
23)	223	97	126
24)	221	$95\frac{1}{2}$	$125\frac{1}{2}$
25)	$219\frac{1}{2}$	95	$124\frac{1}{2}$
26)	$221\frac{1}{2}$	$94\frac{1}{2}$	127

27)

27)	225	95	130
28)	226½	96	130½
29)	222½	96	126½
30)	222	96	126
31)	220	94	126
32)	221	94	127
33)	223½	94	129½
34)	226	95½	130½
35)	228½	97	131½
36)	229½	97	132½.

§. 6. Cum Thermometrum A aſſeri adplicatum erat, repetii obſeruationes alio tempore, et curaui, vt nulla reflexione radiorum ab aliis corporibus, neque propinquitate corporum craſſiorum calefactorum calor augeretur, et notaui.

	Gradus A - -	et gradus B - -	differ.
1)	180	88	92
2)	187	92½	94½
3)	188	100	88
4)	189	99	90
5)	191	99	92
6)	192	100	92
7)	194	100	94
8)	184	97½	86½
9)	182	94½	87½
10)	185	94	97
11)	186	94	92
12)	188	95½	92½
13)	189	97	92
14)	190	97½	92½
15)	190	101	89

16)

16)	192	100	92
17)	194	99	95
18)	195	100	95
19)	193	101½	91½
20)	195	102½	92½
21)	196	103	93
22)	187	102½	84½
23)	190	104	86
24)	194	104	90
25)	196	104	92
26)	196	103	93
27)	198	103	95
28)	198½	102½	96
29)	197	102	95
30)	181	101	80
31)	190	103	87
32)	192	101½	90½.

§. 7. *In diſtantia* 20 *digit. a foco*, *et* 20 *digit. a lente* Thermometrum aſſeri adplicatum radiis refractis oppoſui, et notaui:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	132	94	38
2)	135	95	40
3)	136	94	42
4)	135	93	42
5)	134	91½	42½
6)	133	92½	40½
7)	133	92	41
8)	133	91	42
9)	133	92	41

10)	$132\frac{1}{2}$	92	$40\frac{1}{2}$
11)	$132\frac{1}{2}$	92	$40\frac{1}{2}$
12)	132	92	40.

§. 8. Alio tempore Thermometrum A ita poſui, vt nulla reflexione radiorum a corporibus vicinis, neque calore eorum, affici potuerit, et notaui *in diſtantia* 20 *digit. a foco*:

	Gradus A,	et gradus B ante vitr.	differ.
1)	110	$97\frac{4}{5}$	$12\frac{1}{5}$
2)	114	$97\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$
3)	114	$96\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$
4)	114	$96\frac{4}{5}$	$17\frac{1}{5}$
5)	115	98	17
6)	120	99	21
7)	$117\frac{1}{2}$	$97\frac{1}{2}$	20
8)	117	96	21
9)	$117\frac{1}{2}$	98	$19\frac{1}{2}$
10)	118	98	20
11)	$119\frac{1}{2}$	$99\frac{1}{2}$	20
12)	$122\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{2}$	22
13)	123	101	22
14)	124	99	25
15)	110	94	16
16)	122	$99\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$
17)	121	$100\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$.

§. 9. Alio adhuc tempore coelo non prorſus ſereno et aëre non tranquillo rurſus Thermometrum A ita locaui, vt nulla reflexione radiorum a corporibus vicinis, neque calore eorum, affici potuerit, et obſeruaui *in diſt.* 20 *dig. a foco*:

Gradus

Gradus Ther. A, et	gradus Therm. B ant vitr.	-- differ.
1) -- $96\frac{3}{4}$	87	$9\frac{3}{4}$
2) -- 96	86	10
3) -- 97	86	11
4) -- 99	86	13
5) -- 100	86	14
6) -- 98	85	13
7) -- 100	86	14
8) -- $101\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	15
9) -- $101\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{3}$	$15\frac{1}{6}$.

§. 10. *In diſtanti a* 30 *digit. a foco, et* 10 *a lente* Thermometrum A, aſſeri adplicatum, radiis refractis, expoſui et notaui:

Gradus Therm. A et	gradus Therm. B ante vitr.	-- differ.
1) -- 115, 5	100, 5	15
2) -- 115	97, 3	17, 7
3) -- 115	97	18
4) -- 115	97	18
5) - 115	97	18
6) -- 113	96	17
7) -- 114	96	18
8) -- 114, 5	95, 5	19
9) -- 114	95	19
10) -- 113, 5	95, 5	18
11) -- 114, 5	96, 5	18
12) -- 116, 5	96, 5	20
13) -- 117	96, 5	20, 5
14) -- 116, 5	96, 5	20
15) -- 115, 5	96, 5	19

§. 11. Alio tempore curaui, vt nulla reflexione radiorum ab aliis corporibus, neque propinquitate corporum craſſiorum calefactorum calor augeretur, et notaui *in diſt. 30 dig. a foco*:

Gradus Therm. A,	et gradus B ante vitr.	differ.
1) --- 109	95	14
2) --- 110	96	14
3) --- 110½	96½	14
4) --- 111	97	14
5) --- 111¼	97	14¼
6) --- 112	97	15
7) --- 114½	99½	15
8) --- 112	96½	15
9) --- 113	97	15
10) --- 113½	98	15½
11) --- 113½	98¼	15¼
12) --- 114	99	15
13) --- 114	98½	15½
14) --- 112	97	15
15) -- 111	96½	14½
16) --- 107	93	14
17) --- 106	93	13
18) --- 107½	94	13½
19) --- 107½	93½	14.

§. 12. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et aëre non tranquillo repetii *in eadem diſtantia a foco*, et eadem cautione adhibita obſeruationes, et notaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1) --- 88	85½	2½
2) --- 88	86	2

3)

3)	- - - 88½ - - - - -	86½ - - -	2
4)	- - - 86 - - - - -	85 - - -	1
5)	- - - 86 - - - - -	85 - - -	1
6)	- - - 86½ - - - - -	85 - - -	1½
7)	- - - 87 - - - - -	86 - - -	1
8)	- - - 87 - - - -	86½ - - - -	½
9)	- - - 87½ - - - -	86¼ - - - -	¾.

§. 13. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et aëre non tranquillo notaui *indiſtanti a* 30 *digit. a foco*:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B ante vitr. - -	differ.
1)	- - - 90 - - - -	87½ - - - - -	2½
2)	- - - 90 - - - -	89½ - - - - -	½
3)	- - - 89 - - - -	88 - - - - -	1
4)	- - - 90 - - - -	89½ - - - - -	½
5)	- - - 92 - - - -	91 - - - - -	1
6)	- - - 91 - - - -	91½ - - - - -	½
7)	- - - 91 - - - -	89 - - - - -	2
8)	- - - 92 - - - -	88½ - - - - -	3½
9)	- - - 87 - - - -	83 - - - - -	4
10)	- - - 88 - - - -	82 - - - - -	6
11)	- - - 89½ - - -	82 - - - - -	7½
12)	- - - 89¾ - - -	81 - - - - -	8¾
13)	- - - 84½ - - -	80½ - - - - -	4
14)	- - - 84½ - - -	83½ - - - - -	1
15)	- - - 86 - - -	85 - - - - -	1
16)	- - 87½ - - -	87 - - - - -	½
17)	- - - 87 - - -	87 - - - - -	0
18)	- - - 87 - - -	87 - - - - -	0

§. 14. *In diſtantia 9 digit a lente, et 31 digit. a foco*, coelo non prorſus ſereno et tranquillo collocaui Thermometrum, vt antea notaui:

	Gradus A, et	gradus B ante vitr.	differ.
1)	88	87	1
2)	87	87	0
3)	87	87	0
4)	$86\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	0

In diſtantia 8 digit. a lente, et 32 a foco:

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	$86\frac{3}{4}$	$85\frac{3}{4}$	1
2)	86	85	1
3)	85	85	0

In diſtantia 7 digit. a lente, et 33 a foco.

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	$85\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	0
2)	85	85	0
3)	$85\frac{1}{2}$	85	$\frac{1}{2}$

In diſtantia 6 digit. a lente, et 34 dig. a foco:

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	86	$86\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2)	87	87	0
3)	$87\frac{1}{2}$	88	$-\frac{1}{2}$

§. 15. Alio tempore collocaui Thermometri A bulbum *in diſtantia 35 dig. a foco, et 5 dig. a lente*, et obſeruaui

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	$105\frac{1}{2}$	95	$10\frac{1}{2}$
2)	102	$93\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$

3)

3)	- - - $102\frac{1}{4}$	- - $93\frac{1}{2}$	- - - - $8\frac{3}{4}$
4)	- - - 105	- - 97	- - - - 8
5)	- - - $106\frac{3}{4}$	- - $97\frac{1}{4}$	- - - - $9\frac{1}{2}$

§. 16. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et tranquillo notaui *in diſtantia* 35 *dig. a foco*:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B, - -	differ.
1) - - - 85	- - - - 86	- - - - - — 1
2) - - - 83	- - - - 84	- - - - - — 1
3) - - - 83	- - - - 85	- - - - - — 2
4) - - - $83\frac{3}{4}$	- - - - $84\frac{3}{4}$	- - - - - — 1
5) - - - $83\frac{1}{2}$	- - - - $84\frac{1}{4}$	- - - - - — $\frac{3}{4}$
6) - - - $84\frac{1}{2}$	- - - - 86	- - - - - — $1\frac{1}{2}$
7) - - - 84	- - - - $85\frac{1}{2}$	- - - - - — $1\frac{1}{2}$
8) - - - 83	- - - - 85	- - - - - — 2
9) - - - $83\frac{1}{2}$	- - - - 82	- - - - + $1\frac{1}{2}$
10) - - - $83\frac{1}{2}$	- - - - 83	- - - - + $\frac{1}{2}$
11) - - - $84\frac{3}{4}$	- - - - $84\frac{3}{4}$	- - - - 0
12) - - - $84\frac{3}{4}$	- - - - $85\frac{1}{2}$	- - - - — $\frac{3}{4}$
13) - - - $84\frac{3}{4}$	- - - - 86	- - - - - — $1\frac{1}{4}$
14) - - - 85	- - - - $86\frac{1}{2}$	- - - - - — $1\frac{1}{2}$
15) - - - 85	- - - - $86\frac{3}{4}$	- - - - - — $1\frac{3}{4}$
16) - - - 84	- - - - $86\frac{3}{4}$	- - - - - — $2\frac{3}{4}$
17) - - - 84	- - - - 86	- - - - - — 2
18) - - - $83\frac{1}{2}$	- - - - 86	- - - - - — $2\frac{1}{2}$
19) - - - 84	- - - - 86	- - - - - — 2
20) - - - 84	- - - - $86\frac{1}{2}$	- - - - - — $2\frac{1}{2}$
21) - - - 84	- - - - $86\frac{1}{3}$	- - - - - — $2\frac{1}{3}$
22) - - - $84\frac{1}{2}$	- - - - $86\frac{1}{3}$	- - - - - — $1\frac{5}{6}$
23) - - - $84\frac{1}{2}$	- - - - $87\frac{1}{3}$	- - - - - — $2\frac{5}{6}$
24) - - - 85	- - - - $87\frac{1}{3}$	- - - - - — $2\frac{1}{3}$

25)

25)	85	88	— 3
26)	85	88	— 3
27)	85	88	— 3
28)	85$\frac{1}{3}$	88$\frac{1}{3}$	— 2$\frac{5}{6}$

§. 17. Auxi diſtantiam Thermometri a foco, et collocaui illud *in diſt.* 37 *dig. a foco*, et 3 *digit. a lente*, vt antea, et obſeruaui:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	82	83	— 1
2)	83	83	- 0
3)	83$\frac{1}{2}$	83	+ $\frac{1}{2}$
4)	83	83	0
5)	84	85	— 1
6)	84$\frac{1}{2}$	85$\frac{1}{2}$	— 1
7)	84$\frac{1}{2}$	86$\frac{1}{2}$	— 2
8)	85	86$\frac{1}{2}$	— 1$\frac{1}{2}$
9)	84	85$\frac{3}{4}$	— 1$\frac{3}{4}$
10)	83$\frac{1}{2}$	85	— 1$\frac{1}{2}$
11)	82$\frac{1}{2}$	85$\frac{1}{2}$	— 3
12)	82	84$\frac{1}{2}$	— 2$\frac{1}{2}$

§. 18. Auxi rurſus diſtantiam a foco et *in diſt.* 38 *dig. a foco*, et 2 *digit. a lente* collocaui Thermometri bulbum in coni radiantis axi, et notaui:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	84	85	— 1
2)	85	85$\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$
3)	85	86	— 1
4)	84$\frac{1}{2}$	86$\frac{1}{2}$	— 2
5)	84	86$\frac{1}{2}$	— 2$\frac{1}{2}$

6)

6)	84	87	− 3
7)	$84\frac{1}{2}$	87	− $2\frac{1}{2}$
8)	$84\frac{1}{2}$	84	+ $\frac{1}{2}$
9)	$84\frac{1}{2}$	84	+ $\frac{1}{2}$
10)	$84\frac{1}{2}$	85	− $\frac{1}{2}$
11)	$84\frac{1}{2}$	85	− $\frac{1}{2}$
12)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	− 1
13)	85	$85\frac{1}{2}$	− $\frac{1}{2}$
14)	85	86	− 1
15)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	− 1
16)	$84\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	0
17)	84	85	− 1
18)	84	85	− 1
19)	84	$85\frac{1}{2}$	− $1\frac{1}{2}$
20)	85	$86\frac{1}{2}$	− $1\frac{1}{2}$
21)	86	86	0
22)	$85\frac{1}{2}$	86	− $\frac{1}{2}$
23)	$85\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	0
24)	$85\frac{1}{2}$	86	− $\frac{1}{2}$.

§. 19. Auxi rurſus diſtantiam a foco, et collocaui Thermometri A bulbum *in diſt.* 39 *dig. a foco*, et 1 *digiti a lente* in coni radiantis axe, et obſeruaui:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B	differ.
1)	87	$86\frac{1}{2}$	+ $\frac{1}{2}$
2)	$87\frac{1}{2}$	$85\frac{3}{4}$	+ $1\frac{3}{4}$
3)	$87\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	+ 2
4)	$87\frac{1}{2}$	85	+ $2\frac{1}{4}$
5)	88	$85\frac{1}{2}$	+ $2\frac{1}{2}$.

§. 20. Thermometrum A tandem collocaui ita in coni radiantis axe, vt contingeret ipſam lentem, et notaui:

Gradus	Therm. A, et	gradus Therm. B	differ.
1)	88	86	+ 2
2)	$89\frac{1}{2}$	86	+ $3\frac{1}{2}$
3)	90	$86\frac{1}{2}$	+ $3\frac{1}{2}$
4)	89	$86\frac{1}{2}$	+ $2\frac{1}{2}$
5)	90	88	+ 2
6)	91	89	+ 2
7)	90	89	+ 1
8)	90	88	+ 2
9)	90	$87\frac{1}{2}$	+ $2\frac{1}{2}$
10)	90	88	+ 2.

§. 21. Si ad has obſeruationes attendimus, ſtatim patet, radios directos cum radiis refractis commode comparari non poſſe. Si enim liceret comparare: 1) Creſcente efficacia radiorum directorum, creſcere etiam deberet conſtanter efficacia radiorum refractorum, et contra. Quaedam obſeruationes ſeſe huic legi accommodant, plures tamen recedunt ab ea. 2) Eidem gradui a radiis directis producto ſemper idem gradus a refractis productus reſpondere deberet, et eidem gradui a radiis refractis producto idem gradus a radiis directis productus: vtrumque fieri nequit; quia calor a radiis ſolaribus in Thermometris productus non aeque velociter decreſcit, ac radiorum ſolarium numerus interpoſitione vaporum minui poteſt.

§. 22. Deberet etiam maior differentia graduum Thermometri a radiis refractis et directis productorum obſeruari, ſi maior gradus Thermometri a radiis directis producitur, et contra. Ponatur enim efficacia radiorum directorum ad efficaciam radiorum refractorum per totum tempus obſeruationum $= a : n\,a$, erit differentia $n\,a - a$.

Ponatur

Ponatur incrementum efficaciae radiorum directorum $= b$, erit $a : na = a + b : (a + b)n$. Erit hinc efficacia radiorum refractorum $(a + b)n$; Vnde differentia efficaciae radiorum refractorum et directorum $= (a + b)n - (a + b)$. Erunt hinc differentiae vt $a : (a + b)$ i. e. in ratione efficaciarum radiorum directorum. Eſt vero $(a + b) > a$, ergo etiam differentia calorum radiis refractis et directis productorum maior eſſe deberet, ſi maior calor a radiis directis producitur; hinc etiam differentia graduum Thermometrorum in hoc caſu maior eſſe deberet, quod non ſemper obtinet, vt ex obſeruationibus allatis videre licet. Obſeruationes §. 11. tamen reſpondent ſatis praedicto requiſito.

§. 23. Si ponuntur calores in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco, differentiae graduum Thermometri non ſunt in eadem ratione, in qua ſunt differentiae calorum conſtanter. Erit enim ſub hac conditione calor Thermometro A indicatus ad calorem Therm. B indicatum (§. 6.) vt $16 : 1$, et (§. 8.) vt $4 : 1$. Medius omnium graduum A (§. 6.) eſt $190 \frac{19}{32}$, et medius omnium graduum B eiusdem §. $99 \frac{17}{32}$, ergo differentia media $91 \frac{1}{16}$. Medius omnium graduum A (§. 8.) erit $117 \frac{10}{17}$, et omnium graduum B $98 \frac{3}{17}$, et differentia media $19 \frac{7}{17}$. Eſt autem $16 - 1 : 4 - 1 = 15 : 3 = 91 \frac{1}{16} : 18 \frac{1}{5}$, et deberet eſſe ſec. obſeruationes vt $91 \frac{1}{16} : 19 \frac{7}{17}$; parua ergo eſt differentia. Si autem calor diſtantiae 10 digit. a foco confertur cum calore diſtantiae 30 digit. a foco, erit medius graduum A (§. 11.) $= 111$, et medius graduum B (§. 11.) $= 96 \frac{8}{19}$, hinc differentia media $14 \frac{11}{19}$. Erit autem calor Therm. A indicatus ad calorem Therm B indicatum (§. 11.) ſub praedicta conditione vt $16 : 9 = \frac{16}{9} : 1$,

 et

et (§. 6.) vt 16 : 1. Eſt $16-1 : \frac{16}{9}-\frac{9}{9} = 15 : \frac{7}{9} = 91\frac{1}{18} : 4\frac{97}{135}$, et deberet eſſe vt $91\frac{1}{15} : 14\frac{11}{15}$ ſec. obſeruationes, magna ergo eſt diſcrepantia. Eſt etiam $4-1 : \frac{16}{9}-1 = 3 : \frac{7}{9} = 19\frac{7}{17} : 5\frac{1}{27}$, collatis §. §. 8. et 11. et deberet eſſe vt $19\frac{1}{17} : 14\frac{11}{19}$ ſec. obſeruationes (ibid.); magna ergo rurſus diſcrepantia apparet inter ſuppoſitionem et obſeruationes. Cum ratio differentiarum graduum Thermometri probabiliter non poſſit recedere multum a ratione differentiarum calorum, patet, deſcripta ratione, calorum rationem non definiri.

§ 24. Nec mirum eſt, tantum enim abeſt, vt in omni diſtantia poſt vitrum calor augeatur, vt potius minuatur ob interpoſitionem vitri et vaporum. Conf. §. 13. obſ. 6, et §. 16. obſeruationes in diſtantia quinque digitorum a lente, §. 17. obſeruationes in diſtantia 3 digitorum a lente. Si conſtaret, vbinam poſt vitrum radii refracti eandem efficaciam habent, quam radii non refracti eodem tempore, et a quo puncto adpropinquando magis magisque ad focum efficacia radiorum refractorum creſcat, poſſet definiri, quantum efficaciae interpoſitione vitri et vaporum pereat, et ratio exceſſuum calorum ſuper calorem in vmbroſo aëre exhiberi in diuerſis a foco
Fig. 2. diſtantiis. An ad hunc vſum lentium aliquis antea attenderit? neſcio.

§. 25. Quodſi enim radii nullum obſtaculum offenderent, et omnes a ſole venientes per lentem *a b* frangerentur; denſitas radiorum in D deberet eſſe ad denſitatem radiorum in A, vt $(ab)^2 : (cd)^2$. At habent in diſtantia D radii refracti eandem efficaciam, quam radii directi (per hyp.), ergo radii multi intercipi a vitro et vaporibus debent, ita, vt non plus radiorum refractorum in

in planum D incurrat, quam in eandem aream absque lente radiorum directorum incideret. Eſt hinc denſitas radiorum refractorum in diſtantia A D poſt vitrum, vitro et vaporibus diminuta aequalis denſitati radiorum directorum interpoſitione vaporum diminutae.

§. 26. Inter D et lentem radii loco D proximi minorem debent habere efficaciam ob minorem denſitatem, quam radii directi, quod obſeruationes confirmant, vti dictum §. 24. Si efficaciae radiorum accedendo magis magisque ad lentem perpetuo decreſcerent, minima tandem eſſe deberet in contactu cum vitro, niſi calor vitri a radiis ſolaribus productus maior quam aëris ambientis efficeret, vt gradus Thermometri in parua diſtantia poſt lentem maior obſeruetur, quam ſi Thermometrum ab aëre radiis directis calefacto contingitur, conf. §. §. 19. 20. In diſtantia maiori a lente, vbi calor vitri non pertingit, minor obſeruatur Thermometri gradus, quam ille, qui a radiis aërem directe calefacientibus producitur; donec in diſtantia quadam ſit idem cum gradu Thermometri a radiis directis calefacti.

§. 27. Quodſi ergo coelum ſerenum eſt, et hinc probabiliter vapores aequaliter diſperſi, poſſet definita diſtantia D de vaporum copioſiori vel parciori interpoſitione iudicari. Si exceſſus caloris radiorum directorum ſuper calorem in vmbra eſt paruus, tunc multi vapores debent intercipere radios, et numerus radiorum directorum debet eſſe minor, quam ſi calor radiorum directorum eſt idem, vti antea, et exceſſus iſtius ſuper calorem in vmbra maior. Numerus radiorum directorum vero, quo eſt minor, eo minor eſt diſtantia D. Sit A F = F et D F = D;

 erit

erit numerus radiorum interceptorum ad numerum radiorum reſiduorum vti $(ab)^2 - (cd)^2 : cd^2 = F^2 - D^2 : D^2$, i. e. vti differentia inter quadratum diſtantiae focalis, et quadratum diſtantiae a foco, vbi radii refracti eandem habent efficaciam, quam directi ad quadratum diſtantiae a foco, vbi radii refracti aequalem efficaciam habent cum radiis directis, ita numerus radiorum interceptorum ad numerum radiorum reſiduorum, tam in Thermometrum in axe coni radiantis in diſtantia D poſitum, quam in Thermometrum radiis ſolis directis expoſitum virtutem exerentium. Numerus radiorum interceptorum etiam eſt, vti numerus vaporum radios intercipientium, quo minor ergo D eſt, eo maior erit numerus vaporum, et quo maior illa eſt, eo minor erit numerus vaporum. Si $D = F$ nihil radiorum intercipi debet. Sint diſtantiae D vti $d : nd$, et $n > 1$; erit copia vaporum caſu iſto vti $D = d$, ad copiam vaporum illo caſu, quo $D = nd = F^2 - d^2 : F^2 - n^2 d^2$, et $F^2 - d^2 > F^2 - n^2 d^2$. Tali ergo ratione de maiori et minori multitudine vaporum in Atmoſphaera coelo ſereno iudicium ferri poſſe probabile eſt, ſi Machina ita conſtruatur, vt diſtantia D facile inueniri poſſit.

§. 28. Si in ipſo foco denſitas radiorum refractorum eſt aequalis denſitati radiorum directorum, et calor a radiis directis productus non maior quam calor in vmbra, D erit $= 0$, hinc omnes radii intercipientur, et lens non augebit calorem.

§. 29. Ex his ſatis apparet, quomodo de efficacia caloris in ſectione coni radiantis a lente producti iudicare debeamus, et quomodo ratio denſitatis radiorum lente

te

te refractorum ad denſitatem radiorum directorum definiri debeat.

§. 30. Vt potioribus impedimentis obuiam ire, et diuerſas radiorum in diuerſis ſpatiis collectorum efficacias comparare valeamus, non parum forte faciet, ſi duas lentes aequalium diſtantiarum focalium et earundem amplitudinum et craſſitierum ex ſimili vitro confectas, verbo duas lentes ſimiles et aequales eligamus, et in diuerſis a foco diſtantiis in vtriusque coni radiantis axe Thermometri bulbum collocemus.

§. 31. Hac ratione obtinebitur:

1) Tantum radiorum intercipi ab vna lente, quantum ab altera.

2) Tot radios penetrare per vnam lentem, quot penetrant per alteram.

3) Per idem tempus in vnius Thermometri bulbum efficaciam ſuam exerere radios ſolares, per quod exerunt in alterius Thermometri bulbum. Et erunt:

4) denſitates radiorum ferme in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum Thermometrorum a focis, et in eadem ratione efficaciae radiorum refractorum. Quodſi ergo gradus Thermometrorum ſimul obſeruentur in diuerſis diſtantiis, ratio calorum horum graduum vera ſiue potius exceſſuum calorum ſuper calorem in vmbra innoteſcet; erunt enim exceſſus illi in eadem praedicta ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a focis. Hos exceſſus calorum reſpectiuos calores nominare licebit.

§. 32. Vt conſtet, quomodo commode hae obſeruationes inſtitui poſſint, ſequentia addo: Tab. VII. Fig. 1.

1)

1) Includantur lentes tabulae quadrangularis ligneae *a b c d* foraminibus A et B, diſtantia focalis vtriusque lentis ab vna parte planae, ab altera conuexae ſit quadraginta digitorum Londinenſium, et diameter vtriusque et amplitudo octo digitorum.

2) Firmetur tabula *a b c d* ad aliam tabulam *c d e f* normaliter, et ſit longitudo tabulae *c d e f*, 60 dig. Londinenſium, quae ex vtraque parte in 60 partes aequales diuiſa ſit.

3) Jungatur extremitati *e f*, et firmetur normaliter ad tabulam *e c d f*, tabula lingnea *e f m l* parallela tabulae *a b c d*, et concipiantur perpendiculares ex centris lentium B *r* et A *q* continuatae vsque ad tabulam *e f l m*, et in *q* et *r*, vbi tabulam penetrarent, fiant circuli.

4) Fiant fulcra C D E F et G H I K, quae pariter in ſitu cum tabulis deſcriptis parallelo, et in diuerſis a focis lentium diſtantiis ad tabulam *c d e f* firmari poſſint.

5) Tranſeant per iuga C D et I H cochleae, ad quarum extremitates Thermometra exacte reſpondentia aequalium quantum poteſt eſſe, et ſimilium bulborum firmari poſſint, et ita earum ope Thermometra deprimi et eleuari, vt centra bulborum Thermometricorum a lineis B *r* et A *q* ſecentur.

6) Inſiſtat tota Machina pedi tali, vt in plano horizontali circumduci, et in plano verticali ſimul deprimi et eleuari poſſit. Circa medium nempe tabulae *c d e f* ex vtraque parte procumbant axes cylindrici, qui penetrent foramina cylindrica L et O fulcrorum L M et N O, et illa exacte expleant, ita, vt ſola frictione tota Machina deſcripta in qualibet inclinatione ſeruetur immobilis, vel

Fig. 1. et Tab. VI. Fig. 3.

ſi

ſi hoc non ſufficit, firmetur per cuneos per axes cylindricos diametraliter perforatos tranſeuntes.

7) Fulcra L M et N O contineantur tigno M N, cui in medio iunctus ſit cylindrus ligneus P Q. Recipiatur cylindrus ligneus P Q foramine cylindrico cylindri amplioris R S, qui ad menſam robuſtam T V W X firmatus ſit. Tali ratione fulcrum cum Machina verti poterit circa axin P Q, et circa axin L O deprimi et eleuari, ita vt lentes in quolibet ſitu ſolis, ſoli opponi poſſint.

8) Lentes ſoli ita obuertantur, vt radii ſolares circulos luminoſos forment *e f l m*, circulos ibi delineatos tegentes.

9) Deprimantur vel eleuentur Thermometra, ita vt vmbrae bulborum circa centra circulorum luminoſorum, in *q* et *r* appareant.

10) Ad obſeruationes cum hac Machina commode inſtituendas tres requiruntur obſeruatores, vnus notat gradus Thermometri W V, alter ſimul Thermometri X Y ſigno accepto, et tertius obſeruat gradus Thermometri in loco vmbroſo. Poteſt etiam quartus obſeruare gradus Thermometri radiis ſolis directis expoſiti. Adhuc aliquis debet vnice ſollicitus eſſe de Machina ſecundum ſolis motum ita dirigenda, vt vmbrae bulborum in centris circulorum luminoſorum in *r* et *q* appareant.

§. 33. Quodſi lentes aequales et ſimiles non obtineri poſſunt, poſt vnam lentem vtrumque Thermometrum tam W V quam X Y in diuerſis a foco diſtantiis ponendum eſt, ita, vt vmbrae bulborum in aequalibus a circuli luminoſi in planum *m l f e* proiecti centro diſtantiis appareant. Et caetera fiant, vt §. 32. monuimus.

§. 34. Si diuturnae cum hac Machina obſeruationes ſub diſtantiis Thermometrorum diuerſis factae ſint, ex diario obſeruationum notentur ſimultaneae obſeruationes, et computentur rationes efficaciarum radiorum ſolarium refractorum, et ea ratio exprimet ſimul rationem calorum reſpectiuorum graduum Thermometricorum notatorum. Eadem ratione ex reliquis obſeruationibus aliorum graduum calores reſpectiui, in qua ratione ſint, definiri poterit, et tandem Thermometrum genuinum condi, quo calores reſpectiuos exactius metiri licebit. Si maiora vitra adhibeantur, calor metallorum fuſorum definiri poterit, ſi poſt vnum vitrum Thermometrum collocetur in diſtantia conuenienti a foco, poſt alterum in foco ipſo, vel in diſtantia a foco, vbi incipit fundi, lamina metallica teneatur.

§. 35. Tali Thermometro obtento diſtantia ſectionis coni radiantis, vbi radii refracti eandem denſitatem habent, ac radii directi facile inueniri poterit. Obſeruetur (1) Thermometro praedicto calor reſpectiuus radiorum directorum, ponatur is $= a$ 2) calor reſpectiuus radiorum refractorum in parua diſtantia a foco, ponatur is $= b$, et diſtantia reſpondens $= d$, et diſtantia inuenienda $= x$, erit $x^2 : d^2 = b : \frac{b d^2}{x^2}$. Hinc erit $x = d \sqrt{b : a}$. Si ergo lens accurate elaborata, diſtantiae focalis longioris commode fulciatur cum Thermometro, in certa diſtantia a foco firmato, vt ſoli ita opponi poſſit, vt bulbus Thermometri in coni radiantis axi ſit, poteſt ex notato calore per Thermometrum ex diſtantia nota, et ex calore radiis directis producto, diſtantia D inueniri, et ex hac diſtantia et diſtantia focali numerus, qui comparatus cum numeris ex ſequentibus ſimilibus obſeruationibus ſimiliter inuentis, det rationem radiorum interceptorum et vaporum radios intercipientium (§. 27.).

EMEN-

EMENDATIO LATERNAE MAGICAE AC MICROSCOPII SOLARIS.

AVCTORE
L. Eulero.

§. I.

Cum conſtructio et effectus horum duorum inſtrumentorum Dioptricorum ſatis ſit cognitus, incommoda et vitia, quibus ea laborant, ante commemorabo, quam eorum emendationem exponam. Primo autem obiecta, quae per vtrumque horum inſtrumentorum repraeſentare volumus, pellucida eſſe debent, ita vt ab vna parte illuminata etiam ex altera parte ſplendeant, atque illuminatio quaſi per ipſum obiecti corpus penetret. Hinc pro Laterna Magica obiecta, repraeſentanda ſuper tabulis vitreis pingi ſolent, idque coloribus tenuibus ac diaphanis, vt pictura pelluciditati nullum detrimentum afferat. Pro Microſcopio autem ſolari minima obiecta, quorum imago per id in oppoſitam tabulam albam proiicitur, tam tenuia eſſe opportet, vt pro diaphanis haberi queant. Vnde non ſolum hoc incommodum naſcitur, quod non omnis geneneris obiecta per haec inſtrumenta repraeſentari queant, ſed etiam, cum perfecta pelluciditas etiam in iis obiectis, quae aptiſſima videntur, ineſſe non poſſit, eius defectus neceſſario in repraeſentatione obſcuritatem et confuſionem pariet.

§. 2. Deinde obiecta in his inſtrumentis non in ea parte, quae lenti refringenti eſt obuerſa, ſed in altera parte

te

te auerſa illuminantur, quam ob cauſam quoque ea pellucida eſſe debent. In Laterna enim Magica figurae ſuper vitro depictae a luce pone eas poſita illuminari ſolent, quod lumen etiam a ſpeculo augetur. In Microſcopio autem ſolari obiectum a radiis ſolis ope ſpeculi in id reflexis, et per lentem conuexam magis collectis illuſtratur, idque in ea etiam parte, quae a lente Microſcopica eſt euerſa. Hinc fit, vt ea facies, quae proprie in effigie repraeſentari debet, non niſi ob pelluciditatem illuminetur, et ſi quae partes ſint opacae, eae penitus inconſpicuae maneant, quod quidem vitium iam ante eſt commemoratum. Sed praecipuum incommodum, quod hinc naſcitur, in hoc conſiſtit, quod plurimi radii lucis vel ſolis per obiectum penetrent, atque tabulam albam, effigiei excipiendae deſtinatam illuminent. Conſtat autem, vt effigies in tabula alba clare exprimatur, omne lumen alienum ab hac tabula ſollicite arceri debere: ita vt nulli alii radii, niſi qui ab ipſo obiecto emittuntur, eiusque quaſi formam continent, in tabulam incidant. Ex quo intelligitur, repraeſentationem effigiei in tabula alba ob iſtud lumen alienum a luce vel ſole immediate profectum non mediocriter infringi debere.

§. 3. Denique hi radii alieni tabulam illuminantes ibidem imaginem quandam confuſam lucis vel ſolis exhibebunt, quae quidem in Laternis Magicis lente peculiari ipſi obiecto contigua magis confuſa redditur, vt nulla flammae ſpecies determinata dignoſci queat. Interim tamen vtcunque iſta imago fuerit confuſa, ea ſemper erit imagini verae permixta, eamque corrumpet. Praeterea vero hi radii ob diuerſam refrangibilitatem imaginem di-

uerſis

uerſis coloribus inquinabunt, quod incommodum imprimis in Microſcopio ſolari animaduertitur, per quod ſingulae obiecti partes coloribus iridis circumfuſae apparent, quibus incommodis efficitur, vt in effigie per Microſcopium ſolare repraeſentata nihil fere diſtincte ſpectari queat. Ad quae ingentia impedimenta accedit, quod vulgo non ſolum lentibus nimis magna apertura tribuitur, ſed etiam obiecto nimis magua amplitudo relinquitur, vnde radii ab obiecti extremitatibus in lentem nimis oblique incidunt. Hinc notabilis confuſio per totam effigiem ſuper tabula expreſſam iniicitur, hinc vero partes effigiei extremae vehementer confundantur, vt ſaepe vix agnoſci queant.

§. 4. Quo facilius intelligi poſſit, quibus remediis haec incommoda tolli queant, videamus, quibusnam rebus opus ſit ad claram et diſtinctam cuiusuis obiecti repraeſentationem efficiendam. Sit igitur FEG obiectum, cuius imago per lentem conuexam MM ſuper tabula alba TV diſtincte exhiberi debeat, quae cum ſitu inuerſo appareat, ſit *feg*. Obiectum hic FEG tanquam ſpatio circulari terminatum conſidero, cuius diameter ſit FG, et centrum E, quo melius eius quantitatis ratio haberi poſſit, ita vt in tabula TV maior imago non ſit repraeſentanda, quam quae ab iſto circulo FEG producitur. Iam de obiecti huius ratione ſequentia ſunt tenenda: primo vt totum corpus habeat ſuperficiem, quae quidem lenti MM obuertitur, proxime planam, ſeu, vt quam minimis eminentiis et cauitatibus ſit praeditum. Deinde autem imprimis requiritur, vt iſta obiecti ſuperficies, vnde lens MM radios accepit, quam maxime ſit illuminata, quae illuminatio obiecto vel radiis ſolis, vel ope lampadum con- Fig. 2.

ciliari ſolet: atque ad lumen magis augendum etiam ſpecula et lentes conuexae in vſum vocantur.

§. 5. Quod deinde ad lentem M M attinet, primo cauendum eſt, ne eius ab obiecto diſtantia E A ſit nimis exigua, ſeu ne angulus F A G, qui a radiis obiecti extremis ad lentem ductis formatur, nimis fiat magnus. Quo maior enim fuerit iſte angulus, eo confuſius obiecti extremitates in effigie *f e g* reddentur. Videtur autem hic angulus F A G 20 gradus non excedere debere, ne confuſio inde orta nimis ſit ſenſibilis. Sit huius anguli ſemiſſis F A E, foret 10°, et quia axis lentis A E in planitiem obiecti perpendicularis eſſe, ac per eius centrum E tranſire debet, diſtantia E A circiter ſextupla prodiret ſemidiametri obiecti E F, ſeu E A = 6 E F. Minor ſcilicet haec diſtantia non eſt admittenda, niſi forte confuſionem ſatis ſenſibilem non euitandam cenſeamus; at quo maior ea ſtatuatur, eo magis diſtincta imago in tabula exprimetur. Dummodo autem haec diſtantia E A non fuerit minor quam 6 E F, confuſio hinc oriunda vix percipi poterit.

§. 6. Quam conuexa autem debeat eſſe lens M M, cum ex diſtantia E A, tum ex magnitudine, qua imaginem *f e g* apparere oportet, facile definitur. Inuenta autem hinc diſtantia focali huius lentis, quae ſit = *f*, ſeu quae radios a ſole exceptos ad diſtantiam = *f* in focum congreget, quantam aperturam huic lenti tribui conueniat, videndum eſt. Nam quo maior lenti conceditur apertura, eo maiori confuſione imago in *f e g* afficitur, quia radii per aperturae oram transmiſſi, et ii, qui per medium lentis tranſeunt, non in eadem diſtantia colliguntur.

Ne

Ne igitur haec confuſio nimis fiat ſenſibilis, ſi aperturae, quam circularem aſſumo, ſemidiameter ponatur $= b$, quantitas $\frac{bb}{f}$ partem digiti quinquageſimam ſuperare vix debet: ſeu ſi δ denotet digiti partem quinquageſimam, non eſſe oportebit $b > V \delta f$: quo autem minor accipiatur apertura, eo magis confuſio ab apertura oriunda cauetur. Quodſi vero exiguam confuſionem non curemus, quantitas δ ad partem digiti viceſimam imo decimam augeri poterit.

§. 7. Tabula denique T V dealbata, atque ad axem lentis A *e* normaliter conſtituta eſſe debet. Tum vero id imprimis requiritur, vt haec tabula in loco maxime obſcuro ſit poſita, vt in eam nulli alii radii lucis, niſi qui ab obiecto F E G per lentem M M transmittantur, incidant. Hinc ſollicite omni alienae luci aditus ad tabulam eſt praecludendus, atque totum ſpatium inter lentem M M et tabulam T V interceptum perfectis tenebris obſcurari debet. Quae circumſtantia, ſi probe obſeruetur, radii ab obiecto per lentem transmiſſi effigiem ſuper tabula non ſolum clare ſed etiam diſtincte exhibebunt. Spectator ergo, qui eam contemplari cupit, in eodem loco obſcuro collocatus eſſe, vel ſaltem ei apertura eo inſpiciendi relinqui debet. Tum vero etiam ipſi commoditas procurari poterit, vt non ſolum effigiem intueri, ſed etiam eam ſtylo proſequi ac delineare valeat.

§. 8. Loco tabulae albae T V etiam tabula vitrea adhiberi poteſt, cuius altera ſuperficies politura ſit priuata; haec enim ſuperficies albedinem mentietur, atque effigiem obiecti perinde recipiet. Quod ſi haec ſuperficies extus vertatur, tum a ſpectatore pone tabulam conſtituto effigies non ſolum aſpici, ſed etiam ſtylo plumbeo delineari

neari poterit, quo in negotio etiam hoc commodum accedit, quod manu vel ſtylo effigiei expreſſionem non intercipiat, vti euenit, ſi ante tabulam ſit conſtitutus. Interim tamen etiam a parte poſteriori omni lumen, quantum fieri poteſt, arceri debet. Tum vero effigie ſuper tabula vitrea plumbo delineata, eadem charta, ſi parumper humefacta tabulae arcte apprimitur, facile imprimitur Praeterea etiam obſeruandum eſt, ſi locus, vbi imago apparet, minus fuerit idoneus, eam ope ſpeculi in quamuis aliam poſitionem pro lubitu proiici poſſe; ex quo huiusmodi inſtrumenta infinitis modis variari licet.

§. 9. Quo haec planius explicem, ſit obiecti ſemidiameter E F $=$ E G $= e$, eius a lente diſtantia E A $= a$, quam iam vidimus non minorem eſſe debere quam $6\,e$. Tum ſit lentis M M diſtantia focalis $= f$, et aperturae ſemidiameter $= b$, debebitque eſſe $b < \sqrt{\delta f}$, denotante δ partem digiti vel quinquageſimam vel etiam maiorem; prout confuſio inde oriunda magis minusue fugienda videatur. His poſitis imago poſt lentem exhibebitur ad diſtantiam B $e = \frac{af}{a-f}$, hocque loco tabulam conſtitui oportebit; vnde patet, diſtantiam E A $= a$ neceſſario maiorem eſſe debere quam lentis diſtantiam focalem f. Magnitudo autem imaginis, quae pariter erit circularis, tanta eſt, vt ſit eius ſemidiameter $e\,g$ ad ſemidiametrum obiecti E F $= e$, vti diſtantia Be ad A E, hinc erit imaginis ſemidiameter $ef = eg = \frac{ef}{a-f}$.

§. 10. Imprimis autem ſplendoris ſeu quantitatis luminis, quo imago ſuper tabula eſt apparitua, ratio eſt habenda, vt iam ante iudicare valeamus, vtrum effigies

ad

ad contemplandum ſatis futura ſit luminoſa nec ne. Ac ſplendor quidem iſte imaginis, vt alibi demonſtraui, partim a ſplendore iſtius obiecti, partim ab apertura lentis MM, partim vero a diſtantia $Be = \frac{af}{a-f}$ ita pendet, vt ſi obiecti ſplendor ſeu quantitas luminis ponatur $= L$, ob aperturae ſemidiametrum $= b$, ſplendor effigiei ſuper tabula alba depictae futurus ſit $= \frac{bb}{4 . Be^2} . L = \frac{bb}{4} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a}\right)^2 L$, quae quantitas quidem ſemper erit valde parua, ſed ex *Celeb: Bougueri* experimentis recordandum eſt, ſi L denotet lumen, quo corpora a ſole illuſtrata conſpiciuntur, tum $\frac{1}{250000}$ L eſſe ſplendorem corporum a luna plena illuminatorum, vnde non difficulter ſplendor effigiei cum hoc lumine lunari comparabitur.

§. 11. Si iam requiratur, vt magnitudo imagines datam teneat rationem ad magnitudinem ipſius obiecti, natura lentis ac locus imaginis huic facile definietur. Cum enim ſemidiameter obiecti ſit $= e$, ponamus imaginis ſemidiametrum eſſe debere $= ne$; atque hinc quidem ſtatim patet, fore, $Be = na$, ſeu $Be = n$, EA. Deinde ex aequatione $Be = na \frac{af}{a-f}$, elicitur lentis diſtantia focalis $f = \frac{n}{n+1} a$, cui deinceps conueniens apertura facile aſſignatur. Lumen denique, quo imago ſuper tabula ſplendebit, erit $= \frac{bb}{4nnaa}$ L, poſito obiecti lumine $= L$. Cum autem ſit $bb = \delta f = \frac{n}{n+1} \delta a$, erit hoc lumen imaginis $\frac{\delta}{4n(n+1)a}$ L, vnde patet, lumen hoc eo fore debilius, quo maior fuerit tam ratio multiplicationis $n : 1$ quam diſtantiae $EA = a$.

§. 12. Ex his iam principiis non erit difficile eiusmodi Machinas conſtruere, quae quorumuis obiectorum imagi-

imagines in loco obſcuro ſuper tabula alba clare ac diſtincte exhibeant. Ratio autem conſtructionis potiſſimum pendebit a magnitudine obiecti F E G: niſi enim hoc ſatis fuerit paruum, id non ſimul in Camera obſcura incluſum eſſe poterit, cum propter nimis magnum interuallum, quo tam ipſum obiectum, quam imago a lente diſtare debet, tum vero quia tantum obiectum illuminari non poſſet, quin ſimul Camera inde illuminaretur. Minora autem obiecta, quoniam paruo interuallo a lente diſtare debent, ſaepe minus commode extra Cameram obſcuram collocari et illuminari poſſunt; in ipſa igitur Camera obſcura debito loco conſtituta illuminari conuenit, ſed ſpatium in quo cum lente continentur vndequaque tam probe clauſum eſſe debet, vt inde nihil luminis erumpere, ac tabulam albam illuſtrare valeat. Sequentia igitur huiusmodi Machinarum genera pro diuerſa obiectorum magnitudine conſtituere viſum eſt.

GENVS PRIMVM
AD OBIECTA MAGNITVDINIS SEX PEDVM REPRAESENTANDA.

Fig. 3. §. 13. Oporteat ergo primo eiusmodi obiecta repraeſentari, quae in circulo, cuius diameter F G ſit ſex pedum contineri queant. Erit ergo circuli repraeſentandi ſemidiameter $EF = EG = e = 3$ pedum ſeu 36 dig: quod ſpatium aptum erit ad homines, animalia, aliaque maiora obiecta capienda. Maiora enim obiecta veluti aedificia et integras regiones hic non conſidero, quoniam vulgares Camerae obſcurae ad ea repraeſentanda ſatis accommodatae videntur. Diſtantia ſcilicet huiusmodi obiectorum tanta eſſe debet, vt quaſi pro infinita haberi poſſit, atque ad ea repraeſentanda quauis lente vti licebit, dum-

dummodo tabula in focum lentis conſtituatur. Eo minor autem erit imago, quo minor fuerit lentis diſtantia focalis, contra vero ſplendor imaginis eo magis diminuetur, quo diſtantia focalis maior accipiatur. Cum autem iſte Camerarum obſcurarum vſus ſatis ſit cognitus, eo fuſius exponendo hic ſuperſedeo.

§. 14. Cum igitur ſit obiecti ſemidiameter $e = 3$ pedum, eius a lente diſtantia E A ad minimum eſſe debebit 18 pedum, ſeu $EA = a = 18$ ped. Hinc obiectum F E G extra Cameram obſcuram R S T V conſtitutum eſſe debet, quod quo ſufficienter illuminetur, vel radiis ſolaribus ſit expoſitum, vel per ingentem luminum vim colluſtretur; ſit igitur quantitas luminis obiecto inducta $= L$. Quoniam igitur obiectum ipſum iam ſatis eſt magnum, non conueniet id maiori forma ſuper tabula exprimi, ſit ergo imago ipſi obiecto aequalis, ſeu $n = 1$, vnde lentis M M diſtantia focalis eſſe debebit $f = 9$ pedum, ſeu 108 dig: cui tribuatur apertura ſemidiametri $b = 1$ dig. Quo facto imago repraeſentabitur naturali magnitudine, ſed ſitu inuerſo $f\,e\,g$, ad diſtantiam a lente $Be = 18$ ped. eiusque lumen erit $= \frac{1}{4 \cdot 18^2 \cdot 12^2} L = \frac{1}{186624} L.$

§. 15. Si igitur obiectum a ſole fuerit illuſtratum, lumen imaginis adhuc maius erit, quam ſi ipſum obiectum a luna plena illuminatum cerneretur, quoniam illuminatio lunae eſt ad illuminationem ſolis, vt 1 ad 250000. Quod ſi vero hoc lumen nimis debile videatur, vel lenti maior apertura tribui et eius ſemidiameter b ad $1\frac{1}{2}$ augeri poterit, vnde lumen imaginis duplo fieret maius. Verum ſi maius lumen deſideretur, potius conueniet, imagi-

nem minori forma repraeſentari, quae eandem lentem adhibendo non ſolum clarior, ſed etiam diſtinctior euadet.

§. 16. Ponamus ergo per eandem lentem M M, cuius diſtantia focalis $f = 9$ ped. et aperturae ſemidiameter $b = 1$ dig. obiectum quadruplo minus repraeſentari, ſeu imaginis ſemidiametrum eſſe debere $= \frac{1}{2}$ ped. Oportebit ergo eſſe $Be = \frac{1}{2}a = \frac{9a}{a-9}$, vnde elicitur iuſta obiecti ante lentem diſtantia $EA = a = 27$ ped. atque in Camera obſcura poſt lentem tabula alba conſtitui debebit ad diſtantiam $Be = 13\frac{1}{2}$ ped. Tum igitur huius imaginis lumen erit $= \frac{bb}{4.Be^2}L = \frac{1}{4.162^2}L = \frac{1}{104976}L$, ideoque fere duplo maius quam caſu praecedente. Si adhuc minori imagines magnitudine contenti eſſe velimus, maiori quoque lumine imago praedita conſpiceretur.

§. 17. Maiorem vero etiam ſplendorem imaginis impetrabimus, ſi lentem ſtatim ad minorem imaginis formam accommodemus. Maneat ergo diſtantia $EA = a = 18$ ped. quoniam minor admitti nequit, ne confuſio imaginis nimis fiat ſenſibilis, ac ponatur $cf = \frac{1}{2}EF$ ſeu $n = \frac{1}{2}$, vt prodeat imaginis poſt lentem diſtantia in Camera obſcura $Be = 9$ ped. eritque lentis ad hoc requiſitae diſtantia focalis $f = 6$ ped. cui adhuc ſatis commode apertura ſemidiametri $b = 1$ pollices tribui poterit. Hinc quantitas luminis, quo imago ſuper tabula praedita cernetur, erit $= \frac{1}{4.108^2}L = \frac{1}{46656}L$; quae ergo plus quam duplo maior erit quam caſu praecedente; atque ſi obiectum fuerit a ſole illuſtratum, imaginis lumen fere queri quies fortius videbitur, quam ſi obiectum a luna plena illuminatum cerneretur, hocque ſplendore imago ſuper tabula iam ſatis clara apparebit.

GENVS

GENVS SECVNDVM
AD OBIECTA MAGNITVDINIS VNIVS PEDIS REPRAESENTANDA.

§. 18. Sit igitur circuli, quo obiectum repraeſentandum contineatur, ſemidiameter $EF = e = \frac{1}{2}$ ped. ſeu 6 dig: quae magnitudo apta erit ad facies humanas, partes animalium, minora animalia, ac plantas picturasque capienda, atque diſtantia horum obiectorum a lente tribus pedibus minor eſſe non poterit. Sit ergo $EA = a = 3$ pedum, quae diſtantia non impedit, quo minus interdiu obiectum a ſole, noctu vero etiam extra Cameram obſcuram lampadibus illuminari queat. At ſi obiectum radiis ſolis directe exponi non liceat, ope ſpeculorum lumen ſolare in id reflecti poterit. Noctu vero etiam ſpecula adhiberi conueniet, ſiue plana ſiue concaua, quibus radii lampadum maiori vi in obiectum coniiciantur. Lampades autem a latere conſtitutas eſſe oportet, ne vlli inde radii directe in lentem incidere queant.

§. 19. Quod ſi iam ſemidiameter imaginis $ef = eg$ debeat eſſe $\frac{1}{2}n$ ped. ſeu $6\,n$ dig. fiet diſtantia $Be = 3n$ pedum vel $36\,n$ poll. lentis diſtantia focalis $f = \frac{3n}{n+1}$ ped. ac ſumto $\delta = \frac{1}{50}$ dig. ſemidiameter aperturae erit $b = \sqrt{\frac{36n}{50(n+1)}}$ dig. et quantitas luminis imaginis $= \frac{1}{7200n(n+1)}$ L.

Hinc ſequitur, fore, ſi ſit:

	f	b	Bc	Quantit. lumin. imagin.
$n = 3$	27 dig	0,73 dig.	108 dig.	$\frac{1}{86400}$ L
$n = 2$	24	0,69	72	$\frac{1}{43200}$ L
$n = 1$	18	0,60	36	$\frac{1}{14400}$ L
$n = \frac{2}{3}$	$14\frac{1}{2}$	0,54	24	$\frac{1}{8000}$ L
$n = \frac{1}{2}$	12	0,49	18	$\frac{1}{5400}$ L.

§. 20. Patet ergo, niſi imago plus quam nouies, caſu ſcilicet $n = 3$, ſuperare debeat ipſum obiectum, hocque fuerit ſole illuminatum, ſplendorem imaginis multo fore fortiorem quam caſu praecedente, ita vt lumen a luna plena oriundum longe ſuperet. Sic videmus, ſi obiectum tantum naturali magnitudine exhiberi debeat, quo caſu imago ad diſtantiam trium pedum poſt lentem in Camera obſcura apparebit, lumen imaginis fore ad lumen obiecti vt 1 ad 14400: quae illuminatio in Camera obſcura iam ſatis ſplendida apparebit, ſi quidem obiectum fuerit a ſole colluſtratum. Quod quemadmodum etiam in conclaui, in quod radiis ſolaribus modo ingreſſus patet, ope ſpeculi obtineri queat, ſatis et perſpicuum, videamus igitur, quomodo noctu ope lampadum et ſpeculorum ſatis fortis illuminatio produci queat.

§. 21. Sit igitur F E G obiectum a lampadibus ita
Fig. 4. illuminandum, vt ab iis nulli radii in lentem M M incidere queant. Atque ductis rectis F M et G M ſecundum eas lens tubo M M N N ſit incluſa, quo omnis introitus lucis alienae arceatur, manifeſtum eſt, vltra hunc tubum extra rectas N F et N G lampades conſtitui debere, id quod vtrinque in locis L, *l*, *l*, *l*, pro lubitu fieri poterit; quo plures enim vtrinque lampades accendentur, eo magis obiectum illuminabitur: e re quoque erit tubum N N M M intus nigro colore tingi, ne lumen ab interiori tubi ſuperficie reflexum repraeſentationi damnum afferat: et quanquam diſtantia lentis ab obiecto E A eſt determinata praeſente ſcilicet caſu 3 pedum, tamen conueniet tubi extremitatem fieri ductitiam, vt lens pro lubitu magis minusue ab obiecto remoueri queat.

§. 22.

§ 22. Vt etiam ipſum obiectum in Camera obſcura contineri queat, neque tamen a lampadibus Camera illuminetur, ſpatia lampade continentia vtrinque parietibus vti in Laternis Magicis fieri ſolet, firmiter includi oportebit, vt nonniſi ſuperne fumo exitus concedatur. Hoc modo Machina antrorſum in tubum N M M N deſinens, a parte poſtica duas vtrinque alas habere debebit adiunctas N O P, quae lampadibus locum ſufficientem praebeant. Sic enim obiectum a parte lenti obuerſa F E G ſatis intenſum lumen pro numero ac vi lampadum accenſarum nanciſcetur, et quia nulli alii radii, niſi qui ab ipſo obiecto emittentur, per lentem M M in Cameram obſcuram prorumpere poſſunt, eius imago ſuper tabula alba nullo lumine alieno perturbabitur.

§. 23. Illuminatio etiam ope ſpeculorum, quae vicem plurium lampadum ſuſtineant, mirum in modum augeri poterit. Eductis enim ad axem E A vtrinque ſub angulo circiter ſemirecto rectis E L I, et ad diſtantiam L I vtrinque trium circiter pollicum conſtituantur ſpecula concaua C I D, ne ipſis flamma vicinitas damnum afferat: atque ſi lampades L et L in horum ſpeculorum focis ſint poſitae, ea radios parallele in obiectum reflectent, quibus igitur totum obiectum illuminabitur, ſi ſpecula aeque fuerint ampla atque obiectum, ſin autem ſpecula fuerint minora, eorum diſtantia focalis aliquantum ſuperare debet interuallum L I, quo radii reflexi nonnihil fiant diuergentes, atque totum obiectum expleant. Hoc modo binae vel quaternae lampades ſufficient ad obiectum ſatis intenſo lumine perfundendum.

GENVS

GENVS TERTIVM

AD OBIECTA MAGNITVDINIS DVORVM POLLICVM REPRAESENTANDA.

§. 24. Hoc inſtrumentum ratione magnitudinis obiectorum fere cum Laterna Magica conſueta conueniet; niſi quod hic obiectum in ſuperficie anteriori debet illuminari. Haec magnitudo ergo idonea erit ad partes animalium et plantarum, imo etiam ad exigua animalia integra et plantas, nec non ad picturas capiendas, quae multo maiori forma ſint repraeſentanda. Cum enim ſit $e = 1$ dig. diſtantia E A $= a$ fiet ad minimum 6. poll. praeſtabit autem, quo confuſio magis euitetur, eam aſſumere aliquanto maiorem, ſit igitur $a = 9$ dig. et ſemidiameter effigiei in tabula exprimendae $= n$ dig. erit lentis ad hoc idoneae diſtantia focalis $f = \frac{en}{n+1}$ dig. ac imago poſt lentem diſtincte apparebit in diſtantia B e $= 9\,n$ dig. Denique ſi lumen obiecti ſit $=$ L, et ſemidiameter aperturae lentis $b = \sqrt{\delta f} = \sqrt{\frac{en}{50(n+1)}}$ dig. erit lumen imaginis $= \frac{1}{1800\, n(n+1)}$ L.

§. 25. Hinc pro varia multiplicatione quantitatis imaginis ſeu numeri n hae quantitates, quibus quantitas inſtrumenti determinatur, ſequentes obtinebunt valores.

Si

Si	f	b	Be	Lumen imaginis.
$n=1$	$4\frac{1}{2}$ dig.	0, 30 dig.	9 dig.	$\frac{1}{3600}L$
$n=2$	6 dig.	0, 34	18	$\frac{1}{10800}L$
$n=3$	$6\frac{3}{4}$	0, 36	27	$\frac{1}{21600}L$
$n=4$	$7\frac{1}{5}$	0, 38	36	$\frac{1}{36000}L$
$n=5$	$7\frac{1}{2}$	0, 39	45	$\frac{1}{54000}L$
$n=6$	$7\frac{5}{7}$	0, 39	54	$\frac{1}{75600}L$
$n=7$	$7\frac{7}{8}$	0, 40	63	$\frac{1}{100800}L$

niſi ergo lumen in imagine admodum ingens deſideretur, magnitudo obiecti quinquagies fere multiplicari poterit.

§. 26. Quod ſi ergo obiectum radiis ſolaribus illuminare liceat, imago adhuc multo erit ſplendidior, quam obiecti a luna illuminati. Tum autem obiectum F E G extra Cameram obſcuram regionem verſus, vbi ſol exiſtit, prominere, et ope tubi N M M B cum lente M M connexum eſſe debet, ita vt altera lentis facies B in Cameram obſcuram ſpectet. Huic porro tubo in C, quod punctum adhuc 5 vel 6 pollicibus ab obiecto abſit, adiungatur ſpeculum C I D, cuius latitudo duos pollices ſuperet, longitudo vero C D multo ſit maior, vt vbicunque fuerit ſol in S eius radii a ſpeculo in ipſum obiectum reflecti queant, quem in finem ſpeculum circa C mobile eſſe oportebit, quo facilius ſemper ſoli obuerti queat. Commodiſſimum erit hunc Mechanismum Cameris obſcuris portatilibus applicare, quo ſaepius, vbicunque ſol ſplendeat, in vſum adhiberi poſſit. *Tab. VIII. Fig. 1.*

§. 27. Vt autem huiusmodi repraeſentationes ſemper etiam ſole non lucente exhiberi queant in Camera obſcura, Machina ad formam Laternae Magicae efformata *Fig. 2.*

 vti

vti conueniet, in qua obiectum F E G a lampadibus L, *l* et ſpeculis C I D illuminetur: quae cum multo minor ſit, quam ſupra deſcripta ob longitudinem E A = 9 poll. et E F = E G = 1 poll. alae N O vtrinque ratione longitudinis multo ampliores eſſe debebunt. Quoniam hic lampades non ſolum obiecto erunt viciniores, ſed etiam ſpeculis obiecto maioribus vti licebit, ita, vt obiectum totum a radiis conuergentibus illuminari queat, illuſtratio tanto fortior effici poterit. Optimum eſſet ad hoc ſpecula parabolica adhibere, quorum diſtantia foci aliquanto eſſet minor, quam L I vel *l* I, quae, quo fuerint maiora, eo fortiorem illuminationem producent. Conueniet quoque vel ſpecula vel lampades mobilitate inſtrui, quo facilius omnes radii reflexi in obiectum coniugari poſſint, ſicque nullum eſt dubium, quin obiecto illuminatio admodum vehemens conciliari poſſit.

GENVS QVARTVM

AD OBIECTA MAGNITVDINIS DVARVM LINEARVM REPRAESENTANDA.

§. 28. Hoc inſtrumentum locum tenebit Microſcopiorum ſolarium, cum in circulo diametri FG = 2 lin: ſeu $\frac{1}{6}$ dig. eiusmodi obiecta, quae vulgo per Microſcopia conſiderari ſolent, commode includuntur. Cum ergo ſit E F = E G = $c = \frac{1}{12}$ dig. ſumatur interuallum E A = a = 1 dig. ac ſi effigiei repraeſentandae ſemidiameter $ef = eg$ eſſe debeat = $ne = \frac{n}{12}$ dig. erit diſtantia effigiei a lente B e = n dig. Eiusmodi vero tum lente vti conueniet, cuius diſtantia focalis ſit $f = \frac{n}{n+1}$ dig. cui ſi tribuatur apertura, cuius ſemidiameter = b = [illegible] $\sqrt{\frac{n}{5(n+1)}}$, erit lumen effigiei repraeſentatae = $\frac{\;}{20\,n(n+1)}$ L, deſignante L lumen

men ipſius obiecti. Quod ſi apertura maior vel minor aſſumatur ſplendor effigiei in eadem ratione augebitur vel diminuetur.

§. 29. Hinc pro varia multiplicatione quantitatis imaginis, ſeu pro variis valoribus numeri *n*, inſtrumentum ſequentes requiret determinationes.

Si	*f*	*b*	B *e*	Lumen imaginis.
$n = 5$	$\frac{5}{6}$ dig.	0, 13 dig.	5 dig.	$\frac{1}{6000}$ L
$n = 6$	$\frac{6}{7}$ dig.	0, 13 dig.	6 dig	$\frac{1}{8400}$ L
$n = 7$	$\frac{7}{8}$	0, 13	7	$\frac{1}{11200}$ L
$n = 8$	$\frac{8}{9}$	0, 13	8	$\frac{1}{14400}$ L
$n = 9$	$\frac{9}{10}$	0, 13	9	$\frac{1}{18000}$ L
$n = 10$	$\frac{10}{11}$	0, 14	10	$\frac{1}{22000}$ L
$n = 12$	$\frac{12}{13}$	0, 14	12	$\frac{1}{31200}$ L
$n = 14$	$\frac{14}{15}$	0, 14	14	$\frac{1}{42000}$ L
$n = 16$	$\frac{16}{17}$	0, 14	16	$\frac{1}{54400}$ L
$n = 18$	$\frac{18}{19}$	0, 14	18	$\frac{1}{68400}$ L
$n = 20$	$\frac{20}{21}$	0, 14	20	$\frac{1}{84000}$ L.

§. 30. Si obiectum a ſole illuminari velimus, non ſolum id, ſed etiam lens M M extra Cameram obſcuram prominere debet, vt ſatis habeatur ſpatii ad radios ſolis excipiendos; lens ergo M M tubulo N O O ſit inſerta, qui modo magis, modo minus extra Cameram obſcuram extrahi poſſit. Tum vt ante ſpeculum C L D ita applicetur, vt eius ope radii ſolares commode obiectum verſus reflecti queant, atque quo illuminatio tanto fiat fortior, lens conuexa C D adhiberi poterit, quae radios reflexos eo propius in obiecto colligat Et quia hoc modo illuminatio multo vehementior effici poteſt, multo maior Fig. 3.

 multi-

multiplicatio effigiei exhiberi poterit, quem in finem lentem tantillum propius ad obiectum admoueri oportebit, vt tum imago in multo maiori diſtantia ſit excipienda, quae in eadem ratione euadet maior.

Fig. 4. §. 31. Ope lampadum quoque idem obiectum vehementer illuminari licebit, ſi Machina ad ſimilitudinem Laternae Magicae duabus alis O O inſtructae efformetur. Tum enim commode duo ſpecula concaua C L D applicari poterunt, quae radios lampadum L, L in obiectum quaſi infocum coniiciant. Ad hoc conueniet, ſpecula in formam ellipticam elaborari, in quorum altero foco lampades collocentur, in altero autem ipſum obiectum exiſtat. Sic enim cum obiectum ſit minimum, id, etſi eſt in foco poſitum, totum illuminabitur. Poterunt etiam ſi ſpatium id permittit duae vtrinque lampades accendi, quo non ſolum lumen fiat intenſius, ſed etiam focus reddatur amplior. Ceterum perſpicuum eſt inter haec quatuor inſtrumentorum genera innumera alia, prout obiectorum ratio id poſtulat, conſtitui atque ad vſum accommodari poſſe.

ANNO-

ANNOTATIONES
CIRCA CONSTRVCTIONEM HOROLOGII MARINI
AVCTORE
C. G. Kratzenſtein.

§. 1.

Propoſitum nuper a *Cl. Koesfeldio* horologium autobarum, quod in nauigationibus ad obſeruationes aſtronomicas inſtituendas, et longitudinem maris inde determinandam commendat, anſam mihi dedit, meditationes meas de perficiendo horologio marino explicandi, et rerum peritis ad examen proponendi. Eo magis operae pretium eſſe duco, huic rei ſtudioſe indulgere, quo plurium hominum ſaluti, commodo et vtilitati eo proſpicitur.

§. 2. Cognitis vulgarium clepſydrarum imperfectionibus *Dudlaeus in arcanis ſuis maris* clepſydras mercuriales nautis commendauit. Tantum vero abeſt, vt eiusmodi cleſpydrae longitudinis determinationi inſeruire poſſint, vt nautae eis confidentes maius potius periculum incurrere, quam euitare, queant; poſſent enim in ſcyllam incidere, cum ſe adhuc longe ab ea diſtare putaſſent. Ad hoc eo euidentius oſtendendum clepſydrarum mercurialium imperfectiones hic recenſebo.

Huc pertinent:

1) Alteratio aëris vitro incluſi propter calorem et frigus, modo plus, modo minus fluxui reſiſtens.

2) Dilatatio et contractio vitri et luminis mercurium transmittentis caloris mutationibus oriunda.

 3) Hu-

3) Humiditates modo plus modo minus mercurio adhaerentes et fluxum retardantes.

4) Acceleratio vel retardatio fluxus per vim centrifugam oſcillatione nauis mercurio impreſſam.

5) Irregularitas fluxus ex diuerſa cohaeſione ☿rii inter ſe et cum lateribus vitri pro diuerſo caloris frigorisue gradu.

§. 3. Inquiramus iam quatenus hiſce imperfectionibus mederi poſſimus. Quod ad primam attinet, ea per aëris euacuationem commode tollitur. Altera, tertia et quinta per conſeruationem clepſydrae in eodem caloris gradu remouetur. Quartam vero; quae maximi momenti eſt, quantum ego quidem perſpicio, ineuitabilem eſſe indico. Cum enim centrum arcus oſcillationis nauis, partim pro diuerſa celeritate curſus nauis et velorum diſpoſitione, partim pro vndarum agitatione, admodum variet, parum iuuabit, clepſydram circa illud centrum conſtituiſſe.

§. 4. Procul dubio ſibi perſuaſit *Cl. Koesfeldius* circa horologii ſui marini conſtructionem vim centrifugam horologio non poſſe imprimi, dum illud intra annulos libratorios ſuſpenſum ſitum perpendicularem ſemper ſeruat. Cum enim reliquas imperfectiones horologiorum marinorum ſollicite euitare ſtudet, de vi centrifuga euitanda ne quidem cogitat. Neque eo reſpexit, quod, naui ad aequatorem appropinquante, notabilis vis mouentis pars propter imminutam corporum grauitatem pereat, adeoque motus horologii ſenſibiliter accelerari debeat. Verum quidem eſt in pendulo longiori eiusmodi vis motricis imminutionem nullam ſenſibilem motus alterationem producere, ſed longe aliter res ſeſe habet in horologiis, vbi rotula

tula libratoria (eine Unruhe) moderatoris vicem gerit; ibi enim experientia teſte vna nocte error ex humiditate et frigore accedente oriundus ad 5 minuta prima excreſcere poteſt. Conſtat adeo, longe maiori cum circumſpectione rem eſſe ineundam, ſi voti noſtri compotes fieri velimus.

§. 5. Conſiderabimus itaque, quibusnam proprietatibus horologium marinum gaudere debeat, vt in ſuo genere perfectum iudicari poſſit. Requiritur ſcilicet, vt in tali horologio nulla motus variatio contingere poſſit.

1. Ex oſcillatione et ſuccuſſione nauis.
2. Ex differentia grauitatis ſub diuerſis ab aequatore diſtantiis.
3. Ex penduli elongatione et contractione calore et frigore oriunda.
4. Ex mutatione denſitatis et humiditatis aëris.
5. Ex aucta tenacitate olei ad inunctionem adhibiti.
6. Ex variatione vis elaſticae ſub diuerſo caloris gradu, ſi elater adhibetur.
7. Ex noua intenſione vis motricis.

Quoniam oſcillatio et ſuccuſſio nauis non ſolum oſcillationes penduli turbant, ſed et grauitatem penduli mutant, cuiuis patet, neque pendulum moderatoris, neque pondus vis motricis vicem in horologio marino ſuſtinere poſſe. Eorumdem quoque vſum inhibent requiſitum II. III et IV. Nullum itaque pro praeſenti mechanices perfectione nobis relinquitur refugium, quam vt pro moderatore libratorem, et pro vi motrice elaterem ſubſtituamus. Cum enim in libratore non pondus, ſed vis eius inertiae moderamen efficiat, quae inuariabilis eſt, obtinebimus ſic requiſi-

requiſitum IIdum. Aequaliter deinde per ambitum libratoris diſtributa inertia non patitur, vt aliqua acceleratio oſcillationis ex motu a naue impreſſo contingere poſſit. Ponamus enim libratorem *a c* oſcillare ex *a* verſus *b* et ex *c* verſus *e*; nauem vero ex *b* verſus *a*, euidens eſt partibus libratoris circa *b* motum imprimi verſus *a* adeoque primo intuitu apparet, quaſi inde aliqua retardatio proficiſci debeat. Quoniam vero partibus in *c* ſimul per eamdem nauis oſcillationem ſimilis motus ex *c* verſus *e*, priori ex *b* in *a* contrarius, imprimitur, haec impreſſio alteram tollit, et nulla plane inde oſcillationis variatio vel turbatio contingere poteſt. Ad quartum et quintum requiſitum obtinendum integrum horologium ciſtae ligneae includi poterit, quae circa diſcum horarium vitro craſſiori munita, ceteroquin vndique ferreis ſtannoque obductis lamellis probe ferruminatis veſtita ſit, ita, vt aer ex parte ope antliae manuariae inde extrahi poſſit. Eiusmodi attenuatus aer neque oſcillationi ſenſibiliter reſiſtit, neque humiditates fouet, neque inſpiſſationem olei per euaporationem partis aquoſae admittit. Requiſitum ſextum duplici modo poterit obtineri. Aut enim poteſt horologium per ſubſidia ſatis cognita in vno eodemque caloris gradu ſemper conſeruari; aut, ſi hoc nimis taedioſum videatur, per obſeruationes in anteceſſum determinari, in quantum ſpiralis libratoris intendenda vel remittenda ſit, vt ſub diuerſo caloris gradu oſcillationes ſuas eadem celeritate abſoluat. Hoc cognito per virgae metallicae adplicatae contractionem et dilatationem iſta intenſio et relaxatio ſpiralis automatice absque concurſu obſeruatoris poteſt obtineri. Ad vltimum denique requiſitum obtinendum

Fig. 5.

dum *in II^{do} Nouor. Commentar. Tomo* iam indicaui artificium aliquod, quo adhibito, horologia, elaterem pro vi motrice habentia, motum ſuum ſub intenſione elateris nihilominus continuare poſſunt.

§. 6. Ceterum partes horologii marini maxima cum cura debent eſſe elaboratae. Elater ex optimo chalybe ſit fabrefactus, prouide temperatus et plurimis conuolutionibus adornatus. Cochlea curatiſſime cum elatere ſit aequilibrata, et rotae cum axibus et rotulis ex compactiſſimo metallo perfectiſſime, politiſſime et pro magnitudine operis ſubtiliſſime ſint elimatae, id quod praecipue circa dentes rotae vltimae ſerratae obſeruandum eſt. Libratoris brachia, in extremitatibus pondera lenticularia gerentia, tantae longitudinis conficiantur, quantam circumſtantiae permittunt; vt adeo moderator per tantum momentum magis valeat irregularitates rotarum ineuitabiles coercere. Diuiſio rotarum ita ſit facta, vt, rota maxima ſemel circumacta, omnes rotae eumdem poſitum iterum obtineant, quem initio habuerunt; ſic intra illud ſpatium omnes anomaliae ex imperfectione rotarum oriundae ſemel periodum ſuam abſoluunt. Praeterea anomaliae ex cochleae irregularitatibus oriundae ad pendulum aſtronomicum obſeruentur et notentur. Denique et in itinere horologium ſaepius poterit corrigi, cum locus quidam cognitae longitudinis in conſpectum venit. Adhibito tanto ſtudio et obſeruatis modo dictis cautelis, nullum eſt dubium quin tale horologium ſcopo nautarum ſatisfacere poſſit.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1747, 1748, ET 1749,

a

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Barometro, Thermometroque, in eodem adhuc, quem prius indicaui, ſitu aptiſſime locatis, emergunt ex quotidianis inſtitutis obſeruationibus annorum indicatorum menſtruae altitudines maximae et minimae Barometri ſequentes, quas, vna cum earundem differentiis, hic appono, intelligendo pedis Londinenſis pollices duodecimales, atque eorundem partes centeſimas.

Anno,	menſe	max.	min.	differ.
1747	Ianuario	- - 29.04 -	- 27.88 -	- 1.16
	Febr.	- - 28.81 -	- 27.90 -	- 0.91
	Mar.	- - 29.05 -	- 28.03 -	- 1.02
	April.	- - 28.90 -	- 28.31 -	- 0.59
	Maio	- - 28.73 -	- 28.20 -	- 0.53
	Iun.	- - 28.83 -	- 28.28 -	- 0.55
	Iul.	- - 28.80 -	- 28.38 -	- 0.42
	Aug.	- - 28.88 -	- 28.50 -	- 0.38
	Sept.	- - 28.82 -	- 28.16 -	- 0.66
	Oct.	- - 29.10 -	- 28.40 -	- 0.70
	Nou.	- - 29.14 -	- 28.34 -	- 0.80
	Dec.	- - 29.04 -	- 27.90 -	- 1.14
1748	Ian.	- - 28.98 -	- 28.10 -	- 0.88
	Febr.	- - 28.85 -	- 27.98 -	- 0.87

Mart.

Anno,	menſe	max.	min.	differ.
1748	Mart. - -	28.73 - -	28.02	- - 0.71
	Aprili - -	28 85 - -	28.07	- - 0.78
	Maio - -	28.80 - -	28.20	- - 0.60
	Iun. - -	28.80 - -	28.50	- - 0.30
	Iul. - -	28.90 - -	28.16	- - 0.74
	Aug. - -	28.89 - -	28.49	- - 0.40
	Sept. - -	28.95 - -	28.20	- - 0.75
	Oct. - -	28.98 - -	27.86	- - 1.12
	Nou. - -	29.24 - -	27.98	- - 1.26
	Dec. - -	29.06 - -	28.31	- - 0.75
1749	Ian. - -	28.99 - -	27 64	- - 1.35
	Febr. - -	29.03 - -	27.74	- - 1.29
	Mart. - -	28.88 - -	28.20	- - 0.68
	Apr. - -	28.80 - -	28-22	- - 0.58
	Maio - -	28.79 - -	28.13	- - 0.66
	Iun. - -	28.71 - -	27.98	- - 0.73
	Iul. - -	28.93 - -	28.48	- - 0.45
	Aug - -	28.83 - -	28.03	- - 0.80
	Sept. - -	28.78 - -	28.32	- - 0.46
	Oct. - -	29.00 - -	28.54	- - 0.46
	Nou. - -	29.30 - -	28.30	- - 1 00
	Dec. - -	29.20 - -	28.15	- - 1.05

§. 2. Apparet ex his, manere etiam nunc maximam altitudinum Barometri hic obſeruatarum 29. 36, quae anno 1746 annotata fuit. Sed earundem minima, quae hucusque erat 27. 65, mutanda nunc eſt in 27. 64, viſam d. 22. Ianuarii 1749, cum, antea iam incipiente, ac per integrum octiduum durante, fortiori modo, modo leniori, S W, intermixta pluuiis leuibus aliqua

 ſereni-

ſerenitate; antecedente autem d. 21. Ianuarii, h 5. p. m. grandine piſorum magnitudine delabente, et grauiſſima fulguribus tonitrubusque tempeſtate, incipiente tum fortiſſimo vento S W. Prioris igitur maximae, et huius nouae iam minimae, differentia eſt 1. 72, vt adeo media Barometri altitudo apud nos nunc aeſtimanda ſit 28. 50, nulla habita inſtrumenti, ſupra Nicri fluuii libellam eleuati, ratione, quae, vti dictum eſt, proxime 60 pedes adaequat.

§. 3. Ex obſeruationibus Thermometri, in aëre vmbroſo, Boream verſus conſtituti, ſequentem formo tabellam, quae cuiusque menſis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt vbique intelligendi ſint gradus Fahrenheitiani, caloris.

Anno	menſe	max.	min.	differ.
1747	Ian.	50	9	59
	Febr.	63	34	29
	Mart.	46	15	31
	Apr.	68	28	40
	Maio	76	44	32
	Iun.	87	56	31
	Iul.	86	52	34
	Aug.	86	48	38
	Sept.	87	48	39
	Oct.	68	36	32
	Nou.	56	23	33
	Dec.	64	25	39

Anno

Anno, menſe		max.	min.	differ.
1748	Ian.	44	8	36
	Febr.	39	22	17
	Mart.	46	6	40
	Apr.	59	31	28
	Maio.	80	46	34
	Iun.	80	55	25
	Iul.	80	54	26
	Aug.	75	53	22
	Sept.	68	40	28
	Oct.	61	32	29
	Nou.	52	16	36
	Dec.	56	29	27
1749	Ian.	52	27	25
	Feb.	47	0	47
	Mart.	55	23	32
	Apr.	66	31	35
	Maio	77	38	39
	Iun.	76	51	25
	Iul.	82	47	35
	Aug.	81	49	32
	Sept.	73	43	30
	Oct.	65	18	47
	Nou.	46	18	28
	Dec.	39	−1	40.

Ex quibus itaque apparet, maximum per hos annos calorem fuiſſe 87 graduum, anni ſcilicet 1747, maximum autem frigus in eodem anno, quippe 9 graduum infra 0. Manet itaque ex meis obſeruationibus annus adhuc ſuperior 1746 calidiſſimus omnium, quippe qui gra-

dus oſtendit 94; frigidiſſimus autem 1745, qui nimirum depreſſit Thermometrum ad gradus 13 infra 0.

§. 4. Ad auroras boreales, aut earundem indicia, refero haec:

1747, Ianuarii 22, hora 10 veſp. videbatur aurora borealis, hinc et inde mota, coelo perfecte ſereno; tota fere nocte coruſcans.

Febr. 13, hora 8 veſp. lux borea, per medias nubes et pluuias, crebris coruſcationibus conſpicua videbatur.

Martii 26, hora 9 veſp. inter nubes continuas dubia mihi videbatur talis lux.

Aprilis 8, inter pluuias raras conſpiciebatur lux borealis vaga, et irrequieta, hora 8 veſp.

Octobris 23, hora 9 p. m. viſa eſt lux borealis magna, radiis latis et albis, ſurſum aſcendentibus, inſignis, ac vsque ad Auſtrum fere extenſa, in ſerenitate multa.

1748, Aprilis 1, hora 9 p. m. conſpexi lucem borealem, verſus plagam S W quoque extenſam, integra fere ſerenitate.

Iunii 3, veſtigia huius lucis quaedam vidi hora 10 p. m.

1749, Septembris 22, hora 8 noct. in ſerenitate perfecta, magna apparuit coeli rubedo, quam vulgus pro exorto incendio habuit, ſed quae ſine dubio ab aurora boreali, ſub horizonte noſtro latente, profecta fuit.

§. 5.

§. 5. Plures vero annotauit auroras boreales *Clariſſ. M. Biſchoff*, in vicino nobis pago, Steinebrunn, Paſtor eccleſiae Meritiſſimus, loci ſui eleuatioris opportunitate vſus, cum hic, Tubingae, has obſeruationes montes partim verſus ſeptentrionem iacentes, partim etiam faſtigia alta tectorum, valde impediant. Is igitur ſequentes mecum amice communicauit, debiles modo, modo fortiores. Nimirum anno 1747, Nouembris 23. 24, haec nebula aliquantum erat obducta 27. Decembris 2. 21. 23. 26. 29. 31. Anno 1748, Ianuarii 2. 25. 28. Martii 1, ſimul cum lumine zodiacali apparens. Aprilis 20. Septembris 27. Octobris 18. Nouembris 17. Anno 1749, Martii 10. Septembris 22, h. 8. p. m. rubrum phoenomenum in plaga ſeptentrionali, quod paullo ante ego etiam a me obſeruatum retuli.

§. 6. Alias praeterea quasdam auroras boreales, Stuttgardiae obſeruatas, amice itidem communicauit mecum *Clariſſimus Volzius*, Gymnaſii ibidem Profeſſor. Nempe anno 1748, Febr. 24. Martii 28. 29. Aprilis 27. Decembris 16. 24. Anno 1749, Ianuarii 20. 21. Februarii 2. 16. Martii 10 lux borealis interdum in ſeptentrione albis ſtriis verſus Zenith eiaculatis conſpicua. Martii 17, lux borealis a N W in N O extenſa, inſtar lucidarum nubium latae ſtriae ad Zenith extendebantur; aliae ad horizontem magis inclinatae erant, caetera totum coelum obſcura nocte obuolutum. Martii 18. 21. 23. 31. Aprilis 7 lucis borealis veſtigia. Aprilis 9 in borea quinque aut ſex ſtriae albicantes ab horizonte verſus Zenith emittebantur. Aprilis 14. 16. Maii 3 totum coelum atris nubibus tectum, quarum pleraeque in omnibus

omnibus plagis debili luce, qualis aurorae borealis eſt, infectae videbantur, mox ſequebantur fulgura.

§. 7. Lumen Zodiacale *Caſſinianum* obſeruatum fuit diſtincte anno 1748, Februarii 18 viuidiſſimum, 21. 22, per nubes etiam viſibile. Martii 1. 16. 18. 27. Anno 1749, Aprilis 5, atque multis aliis etiam diebus.

§ 8. Declinationes acus Magneticae, ſex pollices longae, omni cura deprehendi ſequentes, medias inter plures obſeruatas, et ſelectas, omnes occidentem verſus. Anno 1747, $13^{\circ}\ 34'$; 1748 - - $14^{\circ}\ 22'$; 1749 - - $14^{\circ}\ 45'$.

§. 9. In eclipſi Lunae, quae accidit 1747, Februarii 25, temp. mat. ob nubes ingruentes ſequentia modo potui obſeruare. Occultatus nempe fuit *Plato* $4^h\ 7'\frac{1}{2}$; *Copernicus* $4^h\ 14'\frac{1}{2}$; mare nubium vmbra fuit tactum $4^h\ 20'\frac{1}{2}$, temporis veri, in Horologio portatili totati.

§. 10. Reliqua huc referenda ſequentibus abſoluam.

Primo, tonitrua audita fuerunt anno 1747, Maii 31. Iunii 1. 2. 4 5. 6. 19. 25. 28. Iulii 28. Aug. 6. 11. 21. 22. Sept. 8. 9. 23. Dec 5. 1748, Maii 8. 19. Iunii 1. 2. 3. 14. 21 29. 30. Iulii 12. 18. 23. 25. Aug. 6 14 17. 27 30. 1749, Ian. 21. Maii 9. 11. 12. 26 27. Iunii 4. 5. Iulii 2 23. 26 29 Aug. 5. 9. 10. 11.

Secundo, grando cecidit, anno 1747, Iun. 5. 1748, Iun. 29 Aug. 14. 1749, Ian. 21. Iulii 15. Aug. 11. Octobr. 22.

Tertio, primas hirundines vidi anno 1747, Aprilis 14. calore 53 graduum. 1748, Apr. 16. caloris 53 grad. 1749, April. 12. caloris 48. grad.

Quarto, Halones conſpecti fuerunt, anno 1747, Martii 21, hora 7 a. m ſolaris obſeruata fuit portio aliqua. Martii 22, hora 9 p m. lunaris integer, amplus primum, diametri 40°, ſine coloribus; poſtea multo anguſtior redditus et coloratus. 1748, Ianuarii 12. alius lunaris. 1749, nullus.

PHYSICA

PHYSICA.

OBSERVATIONES ANATOMICO-PRACTICAE COMMVNICATAE A *IOANNE FREDRICO SCHREIBER.*

I.

Ob errores, qui in Chirurgia capitis, huius ſuturas cum fracturis confundendo, aliquando obuenire poſſunt, opera danda eſt, vt ſuturarum varietates, quot poſſunt, cognoſcantur. Memor eorum, non plane inutile quid fecero, ſi figuram capitis, adcurate delineatam, cummunicauero, in quo oſſa, quae *triquetra* vocari conſueuerunt, elegantius, atque magis regulari ordine formata, opinor, viſa ſunt numquam.

Lunulam, conſtitutam a duobus arcubus circularibus, quorum ſuperior et maior per oras poſteriores proceſſuum maſtoideorum, et verticem ſuturae, quae Λ Graecorum refert, inferior et minor, per easdem oras et mediam fere altitudinem oſſis occipitis tranſit, implent tria oſſa, ad ſenſum inter ſe aequalia, quorum duo extrema ſunt quadrilatera, et tertium medium eſt figurae pentagonae regularis, cuius ſummus angulus cum angulo illius ſuturae congruit. Tab. IX.

II.

In memoriam atque recordationem Viri, dum viueret, Amiciſſimi et Honeſtiſſimi, elegantiarum litterarum

 Studio-

Studioſiſſimi, et Membri huius Academiae Scientiarum Imperialis Honorarii, *Gottlob Friderici Guilielmi Juncker*, a conſiliis redituum aulicorum AVGVSTAE, quae A: 1746. d. XII. Nouembris, in Ipſius cadauere ſingularia a me viſa ſunt, Ipſi Academiae nunc referam:

Vir ille valde bonus per duos ante obitum annos morbo laborauit, qui tamen ſaepe longa interualla meliori valetudini largitus eſt. Reſpirandi impedimentum, quale in pectore ſentit, erat ex praecipuis malis. Conſtitutione corporis; vitae genere; nocentium et iuuantium effectis, inter ſe comparatis omnibus; conſtitutum fuit, in Ipſo pati, quod in corpore eſt ſubtiliſſimum, atque omnium maxume mobile: neruos ſcilicet, horumque origines, medullas.

Autumno A. 1746. peſſime ſe habuit: verum verſus finem Octobris omnia in melius mutata ſunt. Nihilominus domi ſe debuit continere; id quod propter varia, et magni momenti negotia, ipſi arduum valde, denique impoſſibile, fuit. Quam ob rem, libero aëri, tempeſtate ſerena, et circum meridiem, ſe committendi, venia Ipſi danda fuit. Enimuero D. VIII. Nouembris, apud amicum bene pranſus, dein amicos plures, ab Ipſius domicilio magno interuallo remotos, vsque ad ſextam veſpertinam, quo tempore gelu iam vrebat, animo, ad hilaritatem, ſi vnquam, maxume compoſito, inuiſit, ſic, vt hora ſeptima pomeridiana demum domum rediret, vbi vsque ad vndecimam praeterea cum familiari iocos, ſeriaque, miſcuit. Poſtridie, quum mane ſe egregie habuiſſet, cum plurimis colloquutus eſſet, atque in expediendis negotiis aliquibus occupatus fuiſſet, poſt horam decimam

decimam ante meridiem, inopinato cadebat adtonitus. Certe, hora tertia poſt meridiem, Ipſum inueni motu ſenſuque omni plane deſtitutum. Atque eiusmodi miſeram vitam vixit vsque ad ſupremam Ipſi horam, quae fuit nocte inter diem decimam et vndecimam illius menſis.

Quae ſequuntur, ſunt praecipua ex eis, quae in Ipſius cadauere obſeruaui:

In Capite.

Suturae ſagittalis, vt et coronalis, vix veſtigia.

Dura mater validiſſime adhaeſit cranio.

Iuxta longitudinem adcumbentium ſibi hemiſphaeriorum cerebri, inter piam et arachnoidem, materia albida, gelatinae non adeo diſſimilis deprehenſa eſt, quae preſſu ſerum fudit.

Arteriae piae matris, vt et ea, quae ſub protuberantia annulari ſimplex procedit, et hac ipſa ab illius ramis integre rubente, repletiſſimae fuerunt ſanguine. Sed ſinus, longitudinalis ſuperior, nec non laterales, fere omnino collapſi. Ad lobum medium ſiniſtrum cerebri, vbi quatuor ante mortem horis manum ſponte motam viderant adſtantes, omnia ſanguine perfuſa, et corrupta. Cortex ibi totus ruber: atque medulla hinc inde pluribus punctis rubris interſtincta. Rubebat ſimiliter cortex in aliqua portione lobi poſterioris ſiniſtri; nec non in lobo anteriore dextro.

Hemiſphaeriis cerebri vix ab inuicem reclinatis, corpus calloſum mox conſpiciebatur, ita, vt eius altitudo ſolito maior adpareret. An hoc ab arteriis ſubiectis, ſanguine infarcto tumentibus?

In cauitatium ſuperiorum cerebri, quae portionem lymphae hadebant, plexu choroide, materia gelatinoſa, priori ſimilis.

In glandula pineali calculus exiguus.

In Pectore.

Pulmo ſiniſter inferius firmiter adcretus erat: et ipſius extremitas alba, duraque, inſtar cartilaginis.

In auricula anteriore cordis, vbi vena caua inferior ſe ei inſerit, verus fuit polypus, haud tamen valde amplus: aliusque oblongus, in arteria pulmonali.

Aorta, quamdiu in pectore procedit, indurata erat; inque interna eius ſuperficie, vsque ad curuaturam magnam, hinc inde ſpectabantur excreſcentiae, ſiue villi oblongi, de natura, vt adparebat, gelatinae. Tunica interna infra illum arcum erat incraſſata; et, poſteaquam ab incumbente muſculoſa ſeparata eſſet, in oculos incurrebant tumores exigui, flaui, quos ſteatomata putaui, orificia arteriarum intercoſtalium ambientes, et inconſueto modo coarctantes. Haec eſt valde rara obſeruatio, nec infoecunda nouarum propoſitionum Practicarum.

In Abdomine.

Duo loca in ventriculo rubuerunt.

Lien erat cum diaphragmate concretus, et in eo, vt de ſiniſtro pulmone notatum, obſeruabatur plaga alba, dura, cartilaginea.

III.

Adoleſcens 20. annorum, media hieme, portans trabem, prolabitur in glaciem adeo infortunato, vt ſiniſtrum capitis latus a trabe percuteretur. Homo illico mentis vſum amittit, ſanguine per os et aurem ſiniſtram fluente, cum reſpiratione oppreſſa et ſtrepente, et tuſſe vehementi. In vſum adhibitis venae ſectionibus ac clyſteribus, et dein deraſo capite, duo vel tres tumores adparuerunt, quorum maxumus ſupra auriculam ſiniſtram ſub ora inferiore oſſis verticis ſedebat. Illo ſenſim aperto, in hoc oſſe fractum ſpectabatur, ad ſuturam ſagittalem ſurſum tendens, nec non alia fractura obliqua verſus os occipitis. Facta ſunt omnia, quae in vulneribus et fracturis capitis faciunda ars hodie praecipit. Veſperi ingruebant aliqui motus conuulſiui. Poſtridie adhuc carebat mentis vſu miſer, ſed ronchus ſtertorque ceſſauerant, manente ſpecie ſomni profundi. Die quinto, inciſione producta, praegrandis fractura conſpiciebatur, cum oſſe temporis angulum efficiens. Die ſexto, ſecundum methodum Chirurgi *Belloſte*, margines fractorum perforabantur. Dein nullum graue ſymptoma terruit, praeter tuſſem, vsque ad diem ſextum et decimum, quo ex improuiſo febre corripitur tanta, vt a frigore, calorem praecedente, concuteretur aeger. Rediit eadem febris, eodem tempore, die ſequente. Die 18uo omnia in deterius ruebant, ſic, vt miſer die nona et decima, conuulſis, ac ſingultiens, poſt meridiem obiret.

Enormis fractura, in cranio poſt obitum viſa, et duabus figuris, expreſſa ſequentem in modum ſe habuit: In

In oſſe temporis ſiniſtri fractum vsque in meatum auditorium externum progrediebatur.

In oſſe verticis ſiniſtro fractura duplex. Altera, circum medium oſſis temporis ſub ſutura ſquamoſa enata, adſcendebat, et dein, forma arcus, abibat, et finiebat verſus ſuturam lambdiformem. Altera, ex priore oriunda, ex ipſa circumferentia, qua muſculus temporalis hic oſſi verticis admotus eſt, per medium os recta ſurgebat, et deſinebat diſtantia pollicis a ſutura ſagittali. Hae ſunt illae duae fracturae, quas dixi in viuo animaduerſas fuiſſe.

Quae ſequuntur, in denudato cranio tantum videri potuerunt. Prior fractura transibat ſuturam lambdoideam, arcu illo per os occipitis deorſum producto, et in latere ſiniſtro antrorſum ad proceſſum maſtoideum procedebat, qua de cauſa oriebatur portio triangularis, ſcilicet a fractis et ſutura lambdoide. Eratque intropreſſa. Portio mammillaris ſiniſtra ab oſſe occipitis omni nexu ſoluta fuit. Praeterea illa fractura, per transuerſum oſſis occipitis, itidem arcus figura, vsque ad proceſſum maſtoideum dextrum protendebatur, quo loco portio mammillaris os verticis deſeruerat libera. Os dextrum verticis itidem fractum erat, quae fractura ſub oſſe verticis in linea recta adſcendebat, dein oblique, angulum obtuſum formans, retrorſum ferebatur.

Tab. X. et XI. In latere ſiniſtro adhuc duae fiſſurae fuerunt, ſed et inſignis fractura, ſupra foſſam iugularem et condylum occipitalem vsque in foramen magnum finiens.

Hippocrates notam perituri ex capitis vulneribus, vbi os quomodocumque fractum, fiſſum, vel colliſum fuerit, adſcripſit,

adſcripſit, quod plerumque ſebris inuadat ante diem quartum et decimum, hieme.

IV.

Vir circiter 50. annorum oſtendit in dextro pectoris latere tumorem valde pulſantem, colore cutis, figurae oualis, 12. digitos ab oſſe pectoris vsque ad axillam longum, et 8. digitos latum, in diſtantia trium digitorum a clauicula vsque ad duos pollices infra papillam. Occaſionem ei dederat contuſio, olim ibi loci facta, vnde tumor ſenſim creuit, donec eo vsque adoleuerit. Conquerebatur miſer de oppreſſione pectoris, anxietate circum praecordia, et tuſſe ſicca: arteria interim debiliter, inaequaliter, et aliquando remittendo, pulſabat. Hunc in modum vixit per ſex hebdomadas vsque ad mortem.

Tumor examinatus maxumam partem ſubiacebat muſculo pectorali, et aliquam partem muſculo ſerrato antico, ſiue pectorali paruo. His ablatis, videbatur cruor coagulatus, ater, cum portione puris mixtus: et hoc quoque remoto, foramen, pugnum commode capiens, in oculos incurrit. Erant enim coſtae verae, tertia, quarta, et quinta, cum ſegmentis cartilagineis, carie exeſae. Atque tum nec latuit aneurisma diſruptum, quod erat ſaccus, ab exitu aortae ex pericardio vsque ad originem arteriae ſubclauiae ſiniſtrae extenſus. Saccus hic continebat polypos octo et triginta, omnes veros, lamellarum inſtar, ſibi circumpoſitos. Eorum maxumus ponderabat vncias quindecim, alter vncias ſex et quinque drachmas, ceteri minus: omnes coniunctim aequabant pondus librarum trium, vnciarum vndecim, et duarum drachmarum.

Ille ſaccus inferius concreuerat, partem cum diaphragmate, et anterius partem cum membrana, ſuccingente coſtas. Cum eadem vnum corpus conſtituebat concretione pulmo dexter, aneurismatis volumine, verſus poſteriora ſuperiora que preſſus. Ipſa membrana, coſtas ſuccingens, hinc inde admodum craſſa fuit, ſic, vt, vbi cum pulmone coaluerat, craſſitiem dimidii digiti habuerit. Pulmo ſiniſter ſanus in magna ſeri quantitate fluctuabat. Denique adparuit leuis inflammatio ad mucronem cordis.

V.

Aeſtus, ardor, et dolor punctorius in pectore, reſpiratio anxia, tuſſis ſicca perpetua, infeſtabant nautam, et quidem vsque in tertiam hebdomadam. Vſu congruorum medicamentorum, calor quarta hebdomade deſiit integre, ſed preſſio in pectore, et difficultas reſpirandi, e contrario adeo increuerunt, vt ſaepius in ſuffocandi periculum incurrerit. Haec mala dein adhuc per ſex hebdomadas inconſtanti ſorte continuarunt, quum ſe nunc melius, nunc peius haberet aeger. Tandem acceſſit ſummum moleſtiae reſpirandi incrementum, ſcreatu reiecta alba, viſcoſa, materia, multo ſanguine admixto: ſine inſigni aegritudinum augmento, in alterutro pectoris latere cubare, impoſſibile, ſed in dorſo iacere, tolerabile fuit. Et hunc in modum moriebatur.

Aperto pectore, pulmones verſus poſteriora et latera compulſi, ac membranae, quae coſtas ſuccingit, valde adcreti ſpectabantur: ſupra diaphragma aliqua portio ſeri flaueſcentis fluctuabat: partes pectoris, media, et anteriores laterales, a pericardio, valde extenſo, et liueſcente,

te, replebantur, e quo aperto librae circiter quatuor aquae cruentae effluxerunt. Sed cordis ſuperficies tota circumcirca hirta erat villis magnis, longis, latisque, quaſi carnis fungoſae tenerae, per quos valde diffuſos et ſuperior ventriculus pericardio quam firmiſſime adhaeſit.

Prout villi cordis a ſero ſanguinis formantur: ita illi cum hydrope pericardii plerumque coniunguntur.

Vide Tabulam XII; vbi corda villoſa et latis, magnis, laciniis munita, repraeſentantur. Tab. XII. Fig. 1.

VI.

Vir iuuenis, propter tabem, defunctus eſt. Aliquo ante obitum tempore, conqueſtus eſt de dolore in ſcroto. Inſtituto examine, ſcroto ineſſe deprehendebantur tria corpora, ſibi inuicem aequalia et rotunda: vnde homo tribus teſticulis donatus credebatur. Aperto dein ſcroto cadaueris, viſum eſt, praeter duos teſticulos, rectiſſime conſtitutos, corpus tertium, illis quoad figuram et magnitudinem ſimillimum, vt homo viuus pro triorchide, ſi quis vmquam vere fuit, agnoſci debuerit. Erat vero tertium, inſolitum corpus, inter duos veros teſticulos medium, ampulla, aqua repleta, ſiue hydatis, ab arteriis ſeminalibus arterias recipiens, et venis ſeminalibus venas reddens. Praeterea firmiter connectebatur, ope ſolidae membranae, cum vaſe deferente teſticuli ſiniſtri. Nullum eſt dubium, telae celluloſae morboſam mutationem originem largitam eſſe huic praeternaturali corpori, prout hydatidibus omnibus largiri conſueuit. Poteſt ergo haec obſeruatio inſeruire dubiae reddendae ſententiae de *exſiſtentia trium teſticu-*

 lorum

lorum in vno corpore humano, ſi non refellendae. Nam quicumque ſcriptores de triorchidibus loquuti ſunt, ei retulerunt de tribus corporibus, rotundis, et aequalibus, ſcroto incluſis, tactu deprehenſis; ſed ne vnicam hactenus licuit legere obſeruationem, vbi corpus tertium, praeternaturale, habuit ſtructuram teſticuli, et vas deferens proprium, deſinens in receptaculum ſeminale proprium et tertium, vel in alterutrum ex duobus ordinariis, id eſt, vbi corpus tertium, praeternaturale, habuit eſſentialia teſticuli. Communicauit mecum hanc obſeruationem Chirurgus noſocomii marini Petropolitani, qui aegroto adſtitit, ipſeque ad viuum ab vtraque parte delineauit, quae hic conſpiciuntur.

Fig. 1.

OBSER-

*OBSERVATIONES GENERALES VNIVERSAM HISTORIAM PISCIVM CONCERNENTES.

AVCTORE
Georg. Wilhelm. Stellero.

DE GENERATIONE PISCIVM.

Omnes cetacei et cartilaginei, longi et plani, viuum foetum absque ouo, vel ouo incluſum, edentes, intus vterum mares, teſtes atque paraſtatas, extus vero organa ad generandum manifeſte, et corpora ad coitum apte ſtructa, habent; omnes hinc coeunt, ita, vt foemella ſupina in dorſo iaceat, ac marem ſuperuenientem in elemento aquae inſtabili pinnis excipiat, ne autem delabatur, appendicibus iuxta pudenda, vel forma lata et ſupine ſcabra, vel amplexatione caudarum, vt in cartilagineis latis, impedit.

Omnes ſpinoſi et cartilaginei, ouipari, teretes et angulosi ouaria ſaltem et veſiculas ſeminales, neque vlla alia externa ad generandum apta organa, obtinent.

Inter ſpinoſos excipienda eſt Muſtela viuipara *Schoenefeldii* et forte Muraena. Acipenſeris autem genus, cum corpus ad congrediendum aptum non obtinuit, licet quaedam ſpecies ad cetaceam magnitudinem perueniat, ouiparum eſt, et organis externis ac intus vtero caret.

Verum enim vero cum omnia in vniuerſum animalia, ne minima culice excepta, organa generationis externa habent, ac iisdem manifeſte congrediuntur, hinc quaerendum eſt, quare Deus ſpinoſis piſcibus haec non conceſſerit?

 Reſp.

* Kamtſchatkae ſunt traditae, et nunc, vt opus poſtumum, publici iuris fiunt. Cum autem indicare noſtri officii eſſe duximus, non nulla perlegendo obſcura occurrere loca; hinc ſperamus, lectores ea, quaeque ſunt, in meliorem partem interpretaturos, et ea non auctori, ſed amanuenſi, vitio eſſe verſuros.

Reſp. I. Fruſtranea eſſent organa, cum corpora omnium horum piſcium, praecipue in elemento aquae, ad congrediendum prorſus ſunt inepta.

a) Si enim in vadoſis ac ſicco congrederentur, cum pulmonibus deſtituerentur, cum primis aër extra aquam branchiarum ſtructurae ita eſt aduerſus et lethalis, vt, antequam generatio ſuccederet, morirentur; ſtructura autem haec branchiarum ratione finis, elementi piſcium et magnitudinis, tanquam ſapientiſſima talis, eſt neceſſaria.

b) In aquis etiam ob corporis lubricam et cylindricam ſtructuram coitus eſt impoſſibilis.

c) Si inſtrumenta quaedam ſtationi aut retentioni neceſſaria adeſſent, motus celer impediretur.

d) Si autem quaeritur, quare Deus illorum corpora, ita, nec aliter, vt Raiarum aut Squatorum, ſtruxerit? Tunc reſpondendum eſt: Deus voluit, vt non ſolum maris accolae, ſed et diſſitae continentis incolae, piſcibus, e mari venientibus, fruerentur; et niſi corpora ita leuia, in aquis celeriter, et ſine moleſtia mobilia eſſent, hic finis non obtineretur, piſces defatigarentur, in via morirentur, nec ad fontes fluuiorum, vel tarde ſatis, peruenirent, nec obſtacula in via obuia ſuperare adeo facile poſſent. Contrarium videmus in Gottis, piſcibus litoralibus, Pleuronectis, ac aliis marinis, nunquam fluuios ſubeuntibus.

II. Vt numerus ſpinoſorum piſcium, organis his carentium, millies maior eſt, quam reliquorum, organis his donatorum, ita et vſu, ſapore, ſpecierum diuerſitate reliquos omnes vincunt.

a). Iam vero ſi organa adeſſent in tanta corporis paruitate, in maribus veſiculae ſeminales longe minores, pariter ac ouaria, eſſe deberent, nec ſoboles tam copioſe foret, quod intentioni diuinae fuit contrarium.

b). Vno

b). Vno actu tot milliades ouorum intus impraegnari non poſſent.

c). Continuus partus et coitus eſſet neceſſarius, quod debilibus, et otio ſoli viuentibus, et incrementa capientibus, creaturis his noxae et exortio foret.

d). Si continuo congrederentur, nullam cuſtodiendorum ouorum curam impenderent, vel prae libidine impendere poſſent, ac numeroſa oua in vanum abirent, quia in elemento aquae fluxili, et inter tot piſces, et inſecta, ouis alienarum ſpecierum inſidias ſtruerent: ita vero cum organa deſunt, ouaria ampliſſima ſunt, duas partes abdominis occupantia.

Theſes.

1. Ouaria maxima ſunt in piſcibus maximi vſus, vt in Salmonum genere, quo integrae regiones, tanquam vnico victu, ſuſtentantur.

2. Quo maiora oua, et quo magis nutriunt, eo magis nutriunt piſces, vt Salmones.

3. Quo maiora oua, eo citiora incrementa ſumunt, piſces hinc numeroſiores, e. g. genus Truttaceum.

4. Lactes et oua concreata ſunt piſcibus, incrementa ſumunt vna cum ipſo corpore, a trunco deſcendente arteria aortae, quod in Gadis optime conſpicitur.

5. Truttacei grandia habent oua, et foemellae ſemel tantum in vita pariunt, deinceps, exhauſto ouario, pereunt.

6. In reliquis longaeuioribus oua minora ſunt, et nunquam penitus exhauriuntur, ſed ſubinde accreſcunt noua.

7. Cum autem omnia animalia voluptuoſa quadam ſenſatione ad coitum, et per conſequens ad ſpeciei ſuae propagationem, inuitantur, hinc naturae iniuria videtur eſſe in piſces ſpinoſos, dum non coeunt, conſequenter eos nullam quoque capere voluptatem? Sed reſpondendum eſt: licet piſces maxi-

mum

mum et perlongum ſatis tempus non coeant, tamen durantem voluptatis ſenſum percipiant, quod ſequentibus probo:

a. Mares maiorem longe ſeminis copiam, ac foemellae plura oua, quam reliqui piſces omnes habent. Anadromi huius ſeminis maximam partem, reliqui dimidiam, alii, vt Salmones, fere omnem, effundunt; et Februario capti, e genitura inanes reperiuntur.

b. Tantus eſt ſenſus, vt Salmones omnem rictum reſpuant, et continue per vadoſa loca aſſurgant, quo attritu continuo titillantem genituram excernant, donec ab inedia et voluptate exhauſti, penitus emaciati, pereant.

c. Luſum venereum triplicem obſeruaui:

1. In vadoſis locis obſeruaui, Salmones, mares et foeminas, mutuo ventrium attritu ouorum et ſeminis profluuium promouere.

2. Solitarios attritu ad ſaxa idem agere.

3. Mares Ianuario et Februario fugare foemellas, et Oeſtro percitos, ante ſe agere; e contrario autem foemellas varios Maeandros fugere. Ita et obſeruaui: mares foemellarum caudas dentibus arripere, et eas adeo arcte tenere deſiderio quodam voluptuoſo, vt non tantum caudam cute ſua ſpolient, ſed et ipſos radios prorſus praemordeant.

4. In fluminibus hyeme obſeruatur, eos vnanimiter in locis profundioribus viuere, ita, vt vnus alteri tam arcte apprimatur, quaſi humana induſtria in tot lineas vel ſeries diſpoſiti forent. Procul dubio in profundo maris idem agunt, vel hoc natura admoniti in fluuiis repetunt, quod antea ſub mari agere conſueuerunt. Hinc probabile, cum ſocietatem tam arcte ſeruant, vnius ſpeciei piſces ſub aquis per tam longum interuallum temporis id fieri non poſſe propter calorem, cum ac alia ad tactum ſemper frigida ſunt, ſed propter quandam dulce-

dulcedinem veneream, quam eo mutuo accubitu hauriunt.

5. Piſces, qui ſero autumno genituram eiiciunt, hyeme ſolae foemellae, genitura exhauſtae, capiuntur, vere mares et foeminae, vna circa brumam ambo, in profundam maris ſe recipiunt, inertia et ſomno pingueſcunt, ac mutuo accubitu genituram reparant, autumno inde ſe verſus litora, et loca profunda minus, et arenoſa recipiunt. Ob eiaculationem ſeminis et ouorum etiam capiuntur, et, vt in Gottis et Gadis obſeruaui, vere pariunt, aeſtate autem, et hyeme latent.

6. Dum veſicae ſeminales et ouaria adeo turgent, vt geniturae nihil propter ſpatii anguſtiam addi poſſent, tunc alimentum ſuperfluum in carnem retundant, et muſculi reparantur. Hoc reparato, genitura fluere incipit, conſiſtentiam amittit tenuitate, exitum inteſtini ſtimulat, ad emiſſionem piſces inuitat, et e latebris ſuis ad vada prouocat, vt generent, capiantur, ac voluptuoſo ſenſu fruantur; vlterius autem hinc et tunc temporis propter morem aliorum animalium piſces pinguiſſimi boni habitus et ſapidiſſimi ſunt.

Stimulare vero ſemen profluendo ſphincterem anni ex eo patet:

a. Quod ſphincter intumeſcit magis.

b. Quod fermentationis quadam ſpecie ſalinae partes ab oleogineis diuortium faciunt, ſemen maſculinum et foemininum fluide reddunt, ac laxa euadunt, quo ipſo ſemen exaltatur ſpirituoſum, et ad effectum extra corpus producendum idoneum redditur.

c. Ob laxatum vinculum et praeſentem efferueſcentiam oua marinorum piſcium noctu lucent inſtar Phoſphori, id, quod in ſiccatis, in aëre non contingit, et ſplendor inter ſiccandum ſingulis noctibus, donec omnimode ceſſet, magis

 immi-

imminuitur, ratio, quod ſpiritus ſalinus, urinoſus, laxatus, ſenſim exhalat, et ſiccatione partes collabeſcunt, condenſantur, et arctius ambiuntur.

d Oua et lactes piſcium citiſſime putreſcunt, et ſulphureum odorem ſpirant, quod a ſalibus etiam obſeruatur.

e. Oua vt vt ſolertiſſime praeparata ſale, vel ſiccata rancida, tamen et aeria euadunt, nec diu aſſeruari poſſunt.

f. Stimulare lactes et oua piſces, ex eo patet, quod Salmonum lactes aeſtate in terris Kamtſchaticis, crudae comeſtae, alui profluuium excitant, coctae laxant; in calidis vero regionibus Salmonum lactes et oua exitioſas dyſenterias excitant, vt a Kalmuccis comperi. Hinc et Itaelmani, licet oua Salmonum auidiſſime comedant cocta, tamen ſemper vel ſiccata cruda non audent; lactes vero prorſus non, neque crudas, neque coctas comedunt, quia impotentiam inde prouenturam credunt, quod per conſequens verum, dum poſt validam purgationem alui venus non adeo ſtimulatur.

Quod *Clar Linnaeus* in Cyprinis obſeruauit, hoc ego in Corregonis et Salmonibus obſeruaui: foemellas ſcilicet haurire ore ſemen maris auidiſſime. Ego inſuper obſeruaui, mares deglutire foemellarum oua, tantum autem abeſt, vt credam, haec amoris mutui teſtimonium coitus ſuccedaneum eſſe, vt potius credam, hoc ipſo mutuo hauſto philtro, ſemen magis fluidum, et oua laxiora ad elabendum reddi; nullum enim ductum huc dum inuenire potui a gula ad ouaria, niſi truncum arteriae aortae deſcendentem. Si itaque ſemen oua foecunda redderet, piſciuori piſces piſces integros, cum ipſis teſticulis ſeminalibus, deglutiunt, et ſic non tantum impraegnatio citra tempus foret, ſed et qualis cauſa, talis effectus alias piſcium ſpecies ederet.

Quomo-

Sed quomodo fit concubitus et foecundatio?

Reſpond. 1. Attritu mutuo ventris vnus alterius genituram elicit.

2. Sperma maſculinum irrigando oua foeminina impraegnat.

3. Pinnis ventralibus ſcrobem excauant, et oua in locis quietis eo deponunt, vt aqua, mediante arena, obruantur, imo ſaxa Salmones eligunt, et cauernas ſub illis efformant.

Mari roſtrum in vncum cauatur, ne proprium vel alienum foetum deglutiat.

Mas et foemella vna ad fontes aſcendunt, donec exhauriuntur genitura, et in pluribus locis oua deponunt, in quo natura cauit, ſi in vno loco perirent, tamen in reliquis, in ſaluo eſſent.

Vna ſpecies poſt aliam aſcendit, ne vna alteram turbet, et in prolificando oua rapiat, vel alieni concubitus fiant.

Si vero plures ſpecies vna aſcendunt, annui ſimul tanquam cuſtodes vna aſcendunt, plures ibique cuſtodiunt foetum, vbi parentes protulerunt, et Hodegi ſunt foetus autumno.

In vadoſis fluuiis Salmones dum pariunt, pereunt; in profundis annum ſuperuiuunt, ſed non amplius generant, et pariunt ſemel exhauſti.

Aliter ſe res cum Corregonis, et reliquis piſcibus Anadromis habet, qui minuta oua habent.

In hominibus et animalibus maribus ſemen, et in foemellis oua pariter concreata ſunt; ſucceſſu temporis, corpore ſatis aucto et nutrito, et haec augentur; his auctis, oritur ſtimulus; cogitatio et libido congreſſu animatur;

 ouum

ouum maſculino ſemine intra corpus, quod in piſcibus ſpinoſis extra corpus, contingit; voluptas ſentitur ex attritu et emiſſione ſeminis, quod et in piſcibus obtinet; mutua amicitia in conuerſatione ſtimulante ſanguis diſponitur ad vberiorem ſeminis ſecretionem, futurae excretioni deſtinatam, quod et per mutuam cohabitationem in piſcibus ſuccedit; ſemine ſtimulante, vel volitione voluptuoſa, organa diſponuntur in piſcibus; plenitudo vaſorum, hoc vt in omnibus animalibus, efficit intumeſcentia organorum excretoriorum, fermentatio, et ſeminum peculiaris odor attentionem animalium excitant ratione carentium; hinc quo tempore animal optimi eſt habitus, ac tempore ſit libidinoſum, tunc et conſequenter congreſſus pro alimentorum ratione periodi tempore fiunt.

Organa generationis in hunc vsque diem non detecta ſunt, et non neceſſaria; hinc, vt intentioni diuinae contraria, non detegentur.

Propter hunc congreſſum ſubeunt:

1. Piſces e mari fluuios citra aliam neceſſitatem.

2. E lacubus profundis fluuios.

3. E fluuiorum profundioribus locis ad remotiſſimos fontes, quorſum alias nunquam peruenirent.

4. E latebris in lucem.

5. Hinc quo magis Deus terram piſcibus nutrire, et ditare voluit, eo plures eiusmodi piſces, et inter hos magna ouaria, et grandia oua habentia, dedit; hinc et Salmones nullibi, in tota terrarum orbe, frequentiores, quam in Ruſſico Imperio, et frequentior, quo miſerius clima, et pauperior terra euadit. In terris Kamtſchaticis nullus alius habetur piſcis, cum nec panis,

nec

nec olus, ibi prouenire, nec iumenta copioſa ſeruare poſſunt ob niuis copiam.

Mares Truttacei generis non tantum 1. roſtrum acutius, ſed et 2. dorſum acuminatius, habent, foeminae autem rotundius et conuexius.

Aetas Truttaceorum.

1. Quo plures lamellae membranae branchioſtegae ſunt, eo maior fit piſcis; ſi itaque piſcis permultus 14. 16. 18. 20. habet, hinc facile colligitur, illum iuuenem eſſe.

2. Quo craſſiora et breuiora prima oſſicula pinnarum dorſi ſunt, et poſt annum, eo maior fit piſcis, ſi haec oſſicula, non niſi elixata pinna accurate numerari et cerni poſſunt, ſignum eſt, piſcem eſſe iuuenem.

3. Quo plures ſunt appendices, et longius infra pylorum extenduntur, eo maior fit piſcis, niſi minimus occurrat, ratio, quia tanta copia pro magno corpore alendo ſtructa ſunt.

4. Quo maior vertebrarum numerus, eo maior fit piſcis; ſi vero exiguas multas obtineat, ſignum eſt, piſcem eſſe infantulum aut iuuenem, ita et in iuuenibus ſuperiores vertebrae leuius, inferiores arctius, cohaerent, et apophyſes ſtabiles facile ſeparantur.

Obſeruanda quaedam in examine piſcium, et obſeruata.

1. An Petromyzi et Syngnathi linea laterali careant, et quare? Forte muſculos ſpirales habent, vel vertebrae coſtis et apophyſibus carent.

2. An Cartilaginei ouipari, vt acipenſer, linea laterali careant, quia cum prioribus conueniunt.

3. An Cartilaginei ouipari duplices nares habeant, ob id, quod foramina ſupra oculos pro auditu habent? ſi

ſimplices, certiſſimum erit, nares in piſcibus et auditus et olfactus organa eſſe.

4. Scrutandum, quid cum viuaci piſce fiat, ſi illi aqua immittitur, antea calida aqua omnis mucus abſtergitur.

5. Certum eſt, linguas piſcium ſapore praeditas eſſe, ob id, quod vnam eſcam alteri praeferunt, quasdam vero in vniuerſum reſpuunt.

8. Ingenium piſcium non exiguum arguit, quod Salmones in terris Kamtſchaticis inquirant, quonam in loco clauſtra ſunt humiliora, vt commodius tranſilire poſſint, et vbi vnus tranſilit, reliqui omnes hunc ſequuntur, ita et ſi tranſilire nequeunt ob clauſtrorum altitudinem, vniculos ſub clauſtris fodere audent, vbi vnum foramen inueniunt, ne vnus quidem piſcis aberrat ab hoc foramine.

Obſeruationes
vſum appendicum inteſtinalium concernentes.

Appendices pylori ſecernunt quidem ſuccum nutritium ex ſanguine, affundunt illum in inteſtinum ad iuuandam et accelerandam concoctionem in corporibus frigidis, ſed et praeterea diuerticula et receptacula chyli ſunt, quo piſces tempore inopiae vitam diu ſuſtentant, hoc probatur ſequentibus argumentis.

1. Multi piſces et pancreas et ſimul appendices habent, ergo appendices non vnice pancreatis vice funguntur, niſi ita eſſet, aut pancreas, aut appendices ſuperfluae eſſent.

2. Piſces, quo grandiores euadunt, et citius augentur, ac diutius famem patiuntur, eo maiores et copioſiores appendices habent; hoc patet ex Anatomia Salmonum, qui per integros

integros 6 menſes corpus vehementiſſimo motu et libidine attenuantes, et absque omni cibo ſunt viuentes. Plura vide in Anatome Corregoni, Biela rybiza ſiue бѢла рыбица Ruthenis dicti.

Omnes piſces ſpinoſi propter generationem profunda loca deſerunt, et vadoſa quaerunt, hinc eo tempore copioſiſſime capiuntur, vt Cyprini, Braßem dicti, tempore coitus ripas petunt, et alias ſemper in profundis degunt, procul dubio hoc fit ad facilitandam generationem.

Lucii ſeu Eſoces tempore inundationis riuulos petunt, et foemella quandam impraegnationis ſpeciem praebet; mas coitu praeterlabitur citiſſime foemellam, foemella autem, dum mas praeterlabitur, repente in dorſum ſe coniicit, ac in mari ventrem obuertit, quo tempore in Holſatia etiam accenſis facibus noctu manibus capiuntur.

Corregoni a Salmonibus differunt:

1. Paucitate oſſiculorum branchioſtegorum.
2. Paruitate ouorum.
3. Colore ouorum.
4. Carnis colore.
5. Inteſtinis praepinguibus, e quibus facile ingens copia pinguedinis elixatur.

Caro Salmonum inter ſpinoſos piſces maxime omnium nutrit, cibum largitur ſolidum, absque condimentis ſapidiſſimum, ac contra Medicorum ſententiam maxime ſanum, id, quod integrae gentes in terris Kamtſchaticis ſuis exemplis euincunt, qui ſolis Salmonibus viuunt, nec febribus, nec ſcabiei, nec conuulſiuis morbis obnoxii ſunt; hinc ſingulariter his piſcibus proſpexit Deus omnibus illis genti-

gentibus, qui pane carent, et ob coeli et terrae inclementiam perpetuo carere debent. Sapore omnes conueniunt prope modum Salmones, elixati muſculum inſipidum relinquunt, ac omnem vim nutriendi ab igne et aqua coagulatam in ſe ſeruant, venerem magis quam carnes ſtimulant, praecipue oua idque magis, ſi exſiccata raucorem contraxerint; perpetuo igitur ieiunantes Itaelmeni laſciuiores ſunt, et ad venerem proniores, quam vel maxime carniuora animalia alia. Idem etiam de victu et moribus Aſtracanenſium valet.

In Hiſtoria Salmonum, Corregonorum et Osmerorum accuratiſſime ſequentia obſeruanda ſunt:

1. Longitudo maxillarum.

2. Series dentium et numerus.

3. Figura primae caudae exactiſſime determinanda.

4. Figura caudae muſculoſae ante pinnam caudae, num rotunda, num e conuexo plana, ita Keta e conuexo planam, Krasna et Biela ryba teretem et carnoſiorem obtinent.

5. Oſſiculorum branchioſtegorum figura, et numerus in vtroque latere, et in pluribus ſubiectis.

6. Vertebrarum numerus exactiſſimus.

7. Num branchiae in parte concaua in omnibus eandem ſtructuram obtinent.

8. Epatis figura.

9. Si fieri poteſt appendicum numerus, ſed hic variat.

10. Pleurae color.

11. Oſſiculorum pinnarum numerus.

12. Carnis crudae et coctae qualitas et color.

Inter Salmones oſſicula branchioſtega continent numero:

18.

18. Tſchawytſcha.
11. et 12. Sioemga.
13. Biela ryba.
12. 13. 14. Krasna ryba, ſaepe 3. in dorſo, et 14. in ſiniſtro latere.
12. et 13. Fluuiatilis Malma, aut 12 ſaepe in dextro, et 11. in ſiniſtro, imo 11. in vtroque latere.
13. Lacuſtris Malma e promontorio Kronoky idem piſcis.
12. Kunſcha Tunguſorum.
14. Kaiko, ſed raro, plerumque in dextro 15. et in ſiniſtro 16.
12. Lax Suecorum. *Artedi ſyn. ſpec.* 22.
10. 12. In Laxunge Elf karlorum *Artedi* deſcripti. *p.* 50.

Pinna dorſi oſſiculorum:
14. Kaiko.
14. Kunſcha.
14. Sioemga.
11. Malma e lacu Kronok.
13. Malma fluuiatilis.
12. Krasna ryba.
14. Gorbuſcha.

Pinna poſt annum:
10. In Malma e Kronok.
10. et 11. In Malma fluuiatili.
15. Kaiko.
11. Kunſcha.
13. Sioemga.
15. 16. 17. Krasna ryba.

16. Gorbuſcha.

Numerus oſſiculorum pinnarum poſt branchialium:

16. Gorbuſcha.

Numerus oſſiculorum pinnarum ventralium:

10. Gorbuſcha.

Vertebrarum numerus:

71. Tſchawytſcha.

61. Sioemga.

66. Malma, et lacuſtris et fluuiatilis, conſtantiſſime.

66. Kaiko.

54. Osmerus, Itaelmanis Inniacha.

65. Biela ryba.

60. Waliök, corregonus.

61. Kunſcha.

56. Lax Suecorum, *Artedi.*

60. Forell. *Artedi ſyn.* 51.

67. Krasna ryba.

68. Gorbuſcha.

Inter Salmones ſquamas magnas obtinent:

Salmo, omnium Autorum *Artedi ſpec.* 48.

Tſchawytſcha Kamtſchadalis.

Kaiko vel Keta.

Krasna ryba.

Biela ryba.

Inter Salmones ſquamas minutiſſimas obtinent

Malma Tunguſorum.

Laenok Lenenſium.

Myhkyhs Kamtſchadalis.

Gorbuſcha Kamtſchadalis.

Kunſcha Tunguſorum.

Taimen

Taimen Sibirienſium.

Inter Salmones caudas reſimas obtinent:

Salmo, maculeis cinereis, caudae extremo aequali. *Artedi ſyn.* 23. *The Greg* Anglis, et *Graelax* Suecorum.

Salmo latus, maculis rubris nigrisque, cauda aequali *Artedi ſyn.* 94. *ſpec.* 5. Trutta Salmonata eſt *The Seurf* Anglis, et *Boerteng* Suecis.

Inter Salmones caudas forcipatas obtinent:

Salmo, omnium Autorum *Artedi ſpec.* 48.

Sioemga Kamtſchadalis forte idem.

Tſchawytſcha Kamtſchadalis.

Krasna ryba.

Biela ryba,

Malma.

Kunſcha Tunguſorum.

Kaiko Kamtſchadalis, vel Keta Tunguſis.

Salmo cauda bifurca, maculis ſolum nigris, et ſulco longitudinali in ventre eſt. *Syn.* 25.

Trutta lacuſtris.

Salmo, lineis lateralibus ſurſum recuruis, cauda bifurca. *Artedi ſyn.* 25. Vmbla prior.

Mandibulam ſuperiorem longiorem obtinent clauſo ore:

Sioemga Kamtſchadalis.

Tſchawytſcha.

Kaiko.

Kunſcha.

Salmo, et Blanklak Suecis.

Salmo pedalis, ſiue Saluelin. *Artedi ſyn.* 26.

Gorbuſcha.

Mandibulam inferiorem longiorem obtinent:

Salmo maxilla inferiore paulo longiore, maculis rubris. *Artedi ſpec.* 23. Trutta fluuiatilis eſt auctor Forelli.

Salmo vix pedalis pinnis ventris rubris, maxilla inferiore paulo longiore. *Artedi ſpec.* 52.

Epar indiuiſum obtinent:

Tſchawytſcha.

Kunſcha.

Sioemga.

Lax Suecorum forte idem cum priori.

Epar diuiſum in 2. lacinias:

Kaiko.

Lien indiuiſum obtinent:

Kunſcha forma linguae.

Sioemga velut ſegmentum panis.

Lien diuiſum obtinent in 2. lobos figura y:

Tſchawytſcha.

Kaiko.

Taimen.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

SVMMARIVM

OBSERVATIONIS ECLIPSEOS SOLARIS d. 8. IANVARII 1750. ſt. n. a *CL. KRAFFTIO* TVBINGAE HABITAE E LITTERIS * AD *WINSHEIMIVM* DATIS CVM ACADEMICIS COMMVNICATVM.

Initium ob tempus nebuloſum ſole non admodum eleuato obſeruari quidem haud potuit, ob ſubſecutum autem tempus ſerenum, per totum diem continuans, finis Eclipſeos determinatus fuit.

Inſtrumenta quidem ad obſeruationem adhibita fuere mediocria, horologium ſcil. portatile Anglicanum, tubus terreſtris itidem Anglicanus 5. pedum, et quadrans vnius pedis, pro altitudinibus ſolis capiendis. Hae autem altitudines pro aberratione horologii calculatae, dum intra minutum primum conuenirent, horam 10. cum 52. minutis primis tempore medio pro fine Eclipſis ſat accurate dederunt.

Exitus autem diſci lunae e diſco ſolis vna cum duabus maculis in ſole obſeruatis, in adiecto ſchemate quodammodo adumbratae ſunt. Tab. XIII. Fig. 1.

De cetero Barometrum circa initium 28. $\frac{10}{105}$ poll. duod. Angl. monſtrans, ad 28. $\frac{76}{100}$ circa meridiem depreſſum fuit. Variatio autem Thermometri *Fahrenheitiani* intra 20.° 30.° obſeruata fuit.

* Ex epiſtola Germanico idiomate ſcripta in linguam Latinam tranſtulit, ſcriniis Academicis inſerendum, *Chr. Nic. de Winsheim.*

OBSER-

OBSERVATIO
ECLIPSIS LVNAE TOTALIS d. 19. IVNII ſt. n. 1750. LIPSIAE HABITA.
a
G. Heinſio.

Initium huius Eclipſis ex calculo contigit, luna nondum orta. Hanc ob cauſam et cum nubes copioſae adſpectum lunae, poſt ortum eius, impedirent, immerſionem lunae in vmbram terrae obſeruare non licuit. Circa hor. 9½ lunam, in nubium hiatu per aliquot tempus conſpicuam, totam deprehendi in vmbra terrae; et verſus hor. 10., luna denuo in conſpectum prodeunte, nucleum vmbroſum figurae irregularis in diſco eius animaduerti ab oriente occidentem verſus diſcum ſucceſſu temporis peruagantem, ita quidem, vt quarta circiter pars diſci meridiem verſus (ſitu erecto) nucleo libera et prae reliqua diſci parte valde lucida cerneretur. Luna deinde per vices ſubiit nubes, quibus tandem hor. 10. 35′. tempore vero liberata pateſecit, emerſionem primam ex vmbra terrae iam factam eſſe, ante duo circiter minuta prima temporis. Coelum poſtea ſerenum obſeruationi vsque ad finem Eclipſis fauit. Inſtructus itaque Teleſcopio *Gregoriano* ſub apparatu, quo iſtud obiecta 52. vicibus amplificat, macularum lunae emerſiones ex vmbra terrae optime obſeruare et terminum vmbrae probe diſtinguere potui, ita vt de momentis appulſuum vmbrae ad maculas admodum certus ſim, ambiguo ſi quid acciderit, vix ad 5. ſecunda temporis aſcendente; id quod in eiusmodi obſeruationibus raro contingere ſolet. Momenta appulſuum ad

ad duo horologia comparata, et ex altitudinibus Solis reſpondentibus diebus 20. et 21. Iunii captis probe correcta, ſequentia accipe.

Tempore vero.

10^h.	38′.	38″.	Grimaldus incipit emergere.
	43.	57.	Galileus ex vmbra prodire incipit.
	44.	20.	Galileus totus ex vmbra, quae ſimul Mare Humorum tangit.
	51.	4.	Ariſtarchus incipit emergere.
	51.	17.	Medium Ariſtarchi aeſtimatum.
	51.	36.	Ariſtarchus totus. Intelligitur hic macula Ariſtarchi rotunda, abſtrahendo a cuſpidibus eius verſus ortum excurrentibus.
	55.	40.	Vmbra incipit relinquere Tychonem.
	56.	40.	- - - - Tychonis medium ex aeſtimio.
	57.	45.	- - - - Tychonem totum.
11^h.	0′.	28″.	Copernicus incipit emergere.
	1.	40.	Medium Copernici aeſtimatum.
	2.	48.	Copernicus totus.
	8.	54.	Vmbra ad orientale extremum Platonis.
	9.	33.	- - ad medium Platonis ex aeſtimio.
	10.	15.	- - ad occidentale extremum Platonis. Intelligitur hic nigrum maculae Platonis.
	17.	12.	Manilius ex vmbra prodire incipit.
	17.	44.	Medium Manilii aeſtimatum.
	18.	18.	Manilius totus.
	21.	5.	Vmbra per medium Menelai tranſit, et Dionyſius totus emergit. Obſeruatio aliquantulum dubia.

21. 40. Menelaus totus ex vmbra.
34. 0. Medium Procli emergit.
34. 36. Mare Criſium incipit emergere.
36. 55. Medium Maris Criſii ex aeſtimio.
39. 6. Mare Criſium totum.
40. 16. Finis Eclipſis. Obſeruatio bona et intra 10. ſecunda temporis certa.
40. 30. Finis certe factus eſt.

OBSER-

OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM ANNO 1748 HABITARVM CONTINVATIO

AVCTORE
G. Heinſio.

Eclipſes Satellitum Iouis.

In obſeruationibus Eclipſium Satellitum Iouis ſequentibus Teleſcopio vſus ſum conſueto Gregoriano ſub apparatu, quo iſtud obiecta ſecundum Diametrum 52. vicibus amplificat; temporis autem correctio ex altitudinibus Solis reſpondentibus innotuit.

An. 1738. temp. vero Aſtron. ſtyl. nou.

Auguſt. 21. 12^h. $24'$. $38''$. Emerſio Sat. 2. prima, obſeruatio exacta Satellite celeriter emergente ad diſtantiam circiter $\frac{1}{8}$ Diametr. Iouis a proximo eius limbo.

12^h. $26'$. $50''$. Satelles lumine pleno fulgebat; minimus tamen inter reliquos.

Auguſt. 26. 12^h. $0'$. $47''$. Emers. Sat. 1. prima. Sic quidem opinor hoc momento Satellitem ad diſtantiam circiter $\frac{1}{5}$ Diam. Iouis a proximo eius limbo primum in conſpectum veniſſe; certiſſime autem id affirmare non poſſum. Iouem nempe non niſi per nubium hiatus, adſpectum eius, per vices concedentes, contemplari licuit, ſic quidem vt adſpectus eius circa momentum notatum 5. circiter ſecunda temporis tantum durauerit, atque de facta emer-

 ſione

ſione me haeſitantem reliquerit. Ceſſauit adſpectus deinceps vsque ad 12^h. 10$'$. 58$''$, quo tempore Satellitem inueni emerſum.

Septembr. 4. 8^h. 24$'$. 23$''$. Emers. Sat. 1. prima, ad diſtantiam $\frac{1}{4}$ Diam. Iouis a proximo eius limbo, obſeruatio exacta.

Septembr. 11. 10^h. 21$'$. 46$''$. Emers. prima Sat. 1. ad diſtantiam $\frac{2}{5}$ Diam. ♃ a proximo eius limbo, obſeruatio exacta.

10^h. 23$'$. 46$''$. Satelles totus emerſus.

Septembr. 14. 10^h. 28$'$. 4$''$. Emers. prima Sat. 3. ad diſtantiam $\frac{4}{5}$ Diam. ♃ a proximo eius limbo, obſeruatio exacta.

10^h. 30$'$. 20$''$. Emerſio totalis.

Septembr. 20. 6^h. 49$'$. 4$''$. Emers. prima Sat. 1. obſeruatio exacta, crepuſculo veſpertino licet adhuc ſatis notabili.

6^h. 50$'$. 35$''$. Satelles lumine pleno videbatur.

Occultationes Fixarum a Luna.

D. 15. Auguſt. poſt hor. 15. temporis Aſtronomici inſtabat tranſitus lunae per Pleiades, quem per tubum Gregorianum ſub apparatu ante memorato tantummodo obſeruare licuit. Vſum ſcilicet Machinae parallacticae inſignis lunae altitudo pro conditione loci obſeruationis irritum reddidit. Vt autem annotata diſtincte exponere poſſem, ſchema adiectum ex elementis*, quae Calendarium Aſtron. Berolinenſe ſuppeditauit, ſitu erecto conſtruxi, Fig. 2. eique

eique ſtellas Pleiadum inſigniores pro earundem differentiis longitudinum et latitudinum, ex obſeruationibus *Caſſini* et *Maraldi* in *Commentar. Acad. Sc. Paris, ad an.* 1708. *p.* 384. *ed. Bat.* notis inſerui. Schematis ſequentes ſunt conditiones: *a* A repraeſentat parallelum Eclipticae per lucidam Pleiadum *a* tranſeuntem; *a* B eiusdem circulum latitudinis; C L ſemitam centri lunae viſam, ad quam parallelae ſunt *c* D, *e* E, *g* F, *b* K, vsque ad occurſum cum peripheria lunae, vel linea cuſpidum M I reſpectiue protractae, poſito lunae centro in C. Stellas iisdem litteris inſigniui, quibus vſus eſt *de la Hire* in *Comment. Acad. Sc. Paris, ad an.* 1693. *p.* 59, iisque reſpondent nomina ſequentia *Riccioli*

a. Alcione ſeu Lucida Pleiadum.	*d.* Merope.	*h.* Pater. Atlas.
b. Electra.	*e.* Maia.	*i.* Mater Pleione.
c. Taygeta.	*g.* Celeno.	

Luna ante quatuor circiter horas quadraturam ſecundam celebrauerat, et Immerſiones ſtellarum ad limbum lunae lucidum factae ſunt. His praemiſſis ſequentia noto ex obſeruatione.

Momenta.

An. 1743. d. 15. Aug.
ſt. nou. temp. vero Aſtron.

$15^h. 24'. 25''$. Stellam *g* (*Celeno*) limbo lunae ita vicinam deprehendi, vt poſt $2\frac{1}{2}$ minut. temporis occultationem futuram eſſe coniicerem. Centrum lunae tunc locum C in ſchemate occupabat, quem, ſumta Diametro lunae $= 31'. 5''$. altitudini tem-

pore obſeruationis vi calculi conueniente, ope ſemihorarii lunae in ſemita eius viſa = 12′. 20″. ex interuallo Immerſionum poſthac obſeruatarum per ſchema eruti, aſſignare licuit.

— 25. 25 Eadem ſtella ad diſtantiam a limbo lunae lucido = 45″. circuli maximi ope ſchematis ſimili methodo poſthac definitam, ob lumen lunae forte diſparere incepit. Arbitrabar itaque:

$15^h. 27'. 15''.$ Occultationem huius ſtellae re vera contigiſſe; et de hoc momento intra 10. vel 15. ſecunda temporis certus ſum.

— 35. 25. Stella *c* (*Taygeta*) a limbo lunae lucido interuallo = $1\frac{1}{2}$ Diametro Grimaldi G H a borea auſtrum verſus ſumtae ex aeſtimio diſtabat, cui circiter 1′. 37″. circuli reſpondent.

— 37. 25. Diſtantia eiusdem ſtellae a limbo luna aeſtimata fuit = $\frac{2}{3}$ G H vel 43″.

— 38. 55. Eadem ſtella ad diſtantiam a limbo lunae circiter = 24″. circuli euaneſcere incepit. Iudicabam itaque:

— 39. 15. Occultationem huius ſtellae a limbo lunae re vera accidere debuiſſe; atque de hoc momento intra 10. ſecunda temporis certus ſum. Immerſio facta eſt ad punctum limbi lunaris D ita reſpectu Grimaldi ſitum, vt $\frac{1}{2}$ ipſius G H ſupra D boream

ream verſus, $\frac{2}{3}$ ipſius G H infra D exiſterent.

— 40. 0. Crepuſculum matutinum notabiliter iam ingruebat.

Acceſſit deinceps luna ad ſtellam *b* (*Electram*), quam vero tranſeundo auſtrùm verſus a ſe reliquit. Notaui itaque momentum intra 10. ſecunda temporis certum:

— 57. 0. Quo ſtella *b* in lineam cuſpidum lunae M I productam incidit in K, aeſtimando diſtantiam I K aequalem diſtantiae centri Albategnii a proximo limbo Waltheri, quae maculae prope lineam cuſpidum haerebant. In ſchemate lunari *Doppelmaieri* haec diſtantia conficit $\frac{5}{31}$ Diametri lunaris, quae, ſi vera eſt, ſiſtit IK $=$ 5′. 0″, tantummodo 50″ maiorem ea, quam ſchema conſtructum ex calculo $=$ 4′. 10″. ſuppeditauit. Cum igitur luna prope quadraturam, ideoque linea cuſpidum ad ſenſum perpendicularis exiſteret ad parallelum Eclipticae; momento notato centrum lunae eandem habuit longitudinem cum ſtella *b*; differentia autem latitudinum vtriusque vi praec. foret $=$ 20′. 33″. centro lunae a ſtella boream verſus diſtante.

16^h.

$16^h. 1'. 5''.$	Diſtantiam ſtellae *e* (*Maiae*), ad quam luna nunc accedebat, a proximo eius limbo aeſtimaui aequalem Diametro Grimaldi G H.
— 4. 38.	Immerſio facta eſt huius ſtellae, quam occultationem optime et ſtellam ad ipſum lunae marginem conſtitutam obſeruare licuit. Interuallum horum momentorum Diametrum Grimaldi G H aſſignat $= 1'. 5''$. circuli maximi. Crepuſculum nunc tantum luminis incrementum ceperat, vt ſcriptionibus expediendis absque candelae accenſae vſu ſufficeret. Hoc lumen ingraueſcens obſeruationibus quoque finem impoſuit.

Circa horam 15, antequam has obſeruationes ſuſcepi, diſcrepantiam luminis ſtellarum Pleiades componentium ſenſuum indicio notaui. Lucidiſſima erat *a*, quam proxime excipiebat *b*, et hanc deinceps *e*; minores ipſa *e* videbantur *d*, *b*, *c*, *i*, ad ſenſum inter ſe aequales; minima tandem inter praecedentes viſa eſt *g*. Hanc lucis diuerſitatem comparando cum diſtantiis, ad quas a limbo lunae lucido ſtellae *e*, *c*, *g*, (ſcilicet ad 0'', 24'', 45'', reſpectiue) ob intenſitatem luminis lunaris diſparuerunt, ea confirmantur, quae de eiusmodi effectu intenſitatis luminis in deſcriptione occultationis Palilicii a luna d. $\frac{21.\ \text{Sept.}}{2.\ \text{Octobr.}}$ 1738. Academiae Imperiali exhibita in medium protuli.

d. 2.

d. 2. Septembr. 1748.

Veſperi luna appropinquabat ad fixam 6 Sagittarii 3^tiae^ magnitudinis, eamque occultabat. Congreſſus huius obſeruationem ope Machinae parallacticae, iam ante deſcriptae, ſuſcepi, et poſitiones aliquot fixae ad lunam determinaui, prout iſtas figura 3., ſitu erecto delineata, diſtincte ob oculos ponit, Fig. 3. 5 *p* repraeſentat parallelum ad diurnum fixae; *h p* autem, perpendicularis ad 5 *p*, exhibet circulum horarium. Luna poſt quadraturam primam gibboſa phaſi inſtructa limbo ſuo praecedente tangit *p h*, limbo autem meridionali rectam 5 *p*, ad quam inclinata eſt linea cuſpidum. Si ergo fixa, verbi cauſa, in 6 ponatur, et 65 ad *h p* parallela agatur; repraeſentabit 5 *p* differentiam aſcenſionum rectarum limbi lunae praecedentis et fixae, 65 autem differentiam declinationum limbi lunae meridionalis et fixae, facta ſcilicet relatione ad diurnum fixae. Huius relationis re vera rationem habui in definiendis locis fixae per 1, 2, 3, 4, ſecundum ordinem obſeruationum inſignitis; praeterea vero, cum luna in vicinia horizontis in altitudine circiter 11°. exiſteret, ideoque declinationum differentia correctionem aliquam ex diuerſitate refractionum admitteret, hanc quoque attendere ſategi. His ita comparatis ex obſeruationibus ſequentia definita ſunt momenta.

Ex obſ. pro momento temporis veri d. 2. Sept.	Differentia aſcens. rectarum limbi ☽. praeced. et fixae in partibus diurni (vel etiam quoad numerum in partibus aequatoris).	Differentia declinationum limbi ☽. meridionalis et fixae in partibus circuli maximi.
1. 7^h^. 55′. 49″.	0°. 58′. 18″.	0°. 24′. 52″.
2. 8. 11. 2.	51. 5.	23. 25.

3. 8^h. 17′. 40″. 0°. 47′. 51″. 0°. 22′. 38″.
4. — 25. 42. 43. 41. 21. 47.

Obſeruationem tertiam dubiam aliquantulum reddiderunt nubes tenues ſubinde interuenientes. Denique 8^h. 41′. 0″. Immerſio facta eſt ſtellae ad marginem lunae obſcurum. Emerſionis obſeruationem nubes impediuerunt.

De Cometa an. 1748.

Cometam, qui magnitudinis exiguae menſe Maio an. 1748. in boreali coeli regione apparuit, non niſi ſimplici vice et difficulter d. 9. Maii deprehendere licuit. Lunae enim poſt tres dies plenilunium celebraturae lumen forte non ſolum, verum etiam nubes tenues ſubinde interuenientes, ſaepiſſime erant impedimento. Tandem hor. 12¼ temporis Aſtron. ſitum Cometae inter fixas oculorum aeſtimio cognoſcere licuit. Recta ſcilicet per γ Cephei et Cometam C producta biſecabat interuallum ſtellarum γ
Fig. 4.
et δ Caſſiopeiae, in qua recta Cometa C a γ Cephei tantum diſtabat, vt intercapedo ſtellarum γ et π Cephei aequaretur ⅔ diſtantiae Cometae C et γ Cephei. Signatura ſtellarum eſt *Bayeri* in *Vranometria*. Per tubulum Hollandicum 1½ digit. longum Cometa magnitudine apparente aequalis viſus eſt ſtellae π. Cephei, quae eſt 5^tae^ magnitudinis, pallidioris tamen luminis. Interdum et caudam ſat bene diſcernere licuit ¼ gradus longam, quae a capite Cometae verſus π Cephei ita dirigebatur, vt, ſi producta intelligeretur, hanc orientem verſus ad diſtantiam tamen vix ſenſibil m tranſiret. Circa hor. 13½ Cometam per Tubum *Grego.ianum* ſub apparatu, quo ille 52 vicibus obiecta ſecundum Diametrum amplificat, contemplatus

tus ſum. Cometam iſte ſatis lucidum ſiſtebat; nucleus autem tam male terminatus apparuit, vt figuram eius diſcernere non liceret. Nucleum Atmoſphaera ſat lucida circumdabat, lumine tamen continuo decreſcens a nucleo verſus extrema, ita, vt Solem verſus figura ſemicirculari ſatis ſenſibili terminaretur; in regione vero a Sole auerſa cum productione caudae absque termino ſenſibili confunderetur. Partem Atmoſphaerae lucidiſſimam et nucleo proximam acuminatam credidi caudam verſus. Lumen caudae admodum debile et pallidum Tubus iſte docebat, eamque ad 20. minuta prima circiter extenſam difficulter diſtinguere licuit. Diameter Atmoſphaerae ad ſenſum $\frac{1}{8}$ capacitatis Tubi *Gregoriani* occupabat, eaque Diametrum nuclei duodecies in ſe continebat, quantum quidem terminus nuclei incertus aeſtimium hoc conceſſit. Hoc pacto, cum Tubus $19\frac{1}{4}$ minuta prima circuli maximi capere ſolet, Diameter Atmoſphaerae emergit $= 2'. 24''$; Diameter autem nuclei $= 12''$. Fixas non nullas minores in regione Cometae per Tubum Aſtron. 5. ped. animaduerti quidem et ab iisdem diſtantias Cometae ope Micrometri explorare ſategi; aſt conamen omne nubes ſaepiſſime interuenientes et deinceps crepuſculum matutinum ingraueſcens irritum reddiderunt.

Definitio eleuationis poli ex altitudinibus Solis ſolſtitialibus.

Circa ſolſtitium aeſtiuum an. 1748. Quadrante conſueto obſeruaui altitudines limbi ſuperioris Solis meridianas, vt inde altitudo meridiana ſolſtitialis centri Solis erui poſſet. Cum correctiones adhuc prorſus ſint eaedem,

quas in recenſione obſeruationum ſolſtitialium an. 1746. adhibui, excepta differentia declinationis Solis a ſolſtitiali declinatione, quam facile ſupplere licet; altitudines tantum Quadrante captas, et inde deductas altitudines ſolſtitiales notabo. Deprehendi autem:

	Altitudinem meridianam: Limbi ſuperioris ☉ ſecundum diuiſionem Quadrantis, nulla prorſus adhibita correctione.		Solſtitialem centri Solis adhibitis memoratis correctionibus deductam.
An. 1748			
Iunii. 18.	62°. 40′. 15″.	non admodum incerta.	62°. 6′. 17″.
19.	— 40. 40.	obſ. operoſa.	— 5. 46.
20.	62°. 40′. 45″ vel 41. 0.	dubius circa hanc determinationem.	— 5′. 21″ / 36
21.	— 41. 0.	obſeru. exacta.	— 5. 31.
22.	— 40. 40 / 45	ſat certa.	— 5. 30. / 35.
23.	— 40. 0.	obſ. exacta.	— 5. 34.
Iunctis altitudinibus ſolſtitialibus aeſtiuis an. 1746 - - Iunii. 24.			— 6. 6.
25.			— 5. 46.
emergit media			62°. 5′ 42″.
Circa ſolſtitium brumale an. 1748.			
Decembr. 24.	15°. 50′. 0″.	obſeru. exacta.	15°. 8′. 50″.
Si cum hac conferantur altitudines ſolſtitiales hybernae an. 1747. d. 20. Decembr.			15. 9. 41.
d. 21. - - - -			- 8. 58.

deſinitae, cuiusmodi prodire ſolent,

ſi parallaxis Solis ratio habeatur, cuius conſiderationem in recenſione obſeruationum an. 1747. omiſi, habebitur media - - - - - - -	15°. 9′. 10″.
Hinc cum inter aeſtiuas media ſit -	62. 5. 42.
erit diſtantia Tropicorum - - -	40. 56. 32.
obliquitas Eclipticae - - -	23. 28. 16.
et Eleuatio poli Lipſiae - - -	51. 22. 34.

De apparitione Veneris interdiu.

D. 13. et 14. Octobr. an. 1748. horis antemeridianis Venerem interdiu ad dextram reſpectu Solis nudis oculis conſpexerunt multi, quam inſolitam ſtellae apparitionem inſtar portenti habuit vulgus. Eandem quoque d. 18. Octobr. poſt horam 9. matutinam probe adhuc in vicinia lunae videre mihi licuit. Apparentiam hanc contingere debere docuit *Hallejus* in *Tranſact. Anglic. N.* 349, ſi area partis illuminatae diſci Veneris e terra conſpiciatur maxima, quae conditio prope coniunctionem Veneris cum Sole inferiorem locum habet, dum Venus a Sole vel verſus Orientem vel Occidentem ad 40. gradus circiter elongata cernitur. Hoc quidem pacto, cum Venus ad eundem reſpectu Solis et terrae ſitum interuallo 584. dierum circiter redire ſoleat, eiusdem quoque phaenomeni reditus ad idem interuallum accidere debet. Interim experientia abunde docet, euidentem eiusmodi apparitionem Veneris tam frequentem non eſſe, vt iſta cum periodo memorata conciliari poſſit. Nec coeli inclementia adſpectum phaenomeni forſan impediens hic excuſationi ſemper locum facit, ſiquidem duratio vnius eiusdem-

que apparitionis limitibus nimis arctis circumſcripta non eſt, ſed ad 15. pluresque dies extenditur. Aliam igitur, praeter iſtam *Halleji*, conditionem, attendere neceſſe erit. Scilicet ſitus Veneris reſpectu horizontis in computum quoque trahi debebit. Manente enim Veneris fulgore, quem a Sole recipit iſta, eodem, conſpectus Veneris interdiu facilior detur neceſſe eſt, ſi iſta inſignem ſuper horizonte altitudinem habeat, Sole locum depreſſiorem occupante, ac ſi Veneri horizonti viciniori debilitatio lucis ex maiori vaporum Atmoſphaerae copia accidat. Vt igitur conditionem hanc regulis generalioribus explicare liceat, ſequentes hypotheſes introducere conueniet. Fingamus, Venerem, quippe ab Ecliptica non multum euagantem, in Ecliptica ſemper incedere; tempus autem, quo Venus interdiu nudo oculo conſpici debeat, reſtringatur ad momentum ortus vel occaſus Solis. His poſitis conditiones aſſignare debemus, ſub quibus Venus, accedente ad iſtas hypotheſes *Halleji* conditione, maximam ſuper horizonte altitudinem acquirat. Referat H E Z meridianum, Z Zenith, H A S horizontem, E V S Eclipticam eo in ſitu, qui pro data poli eleuatione locum habet, Sole ad S in horizonte ad datum diem conſtituto. Diſtet nunc Venus in Ecliptica a Sole arcu V S = 40. grad. vi conditionis *Hallejanae*, et per locum Veneris V ductus ſit circulus verticalis Z V A; erit V A altitudo Veneris, quae hypotheſibus ſupra dictis et conditioni *Hallejanae* reſpondet. Haec maxima, manente poli eleuatione, requiritur, ſi caſus maxime idoneus pro apparitione Veneris interdiu exiſtere debeat. Eſt autem in triangulo S V A ad A rectangulo ſin. tot. : ſin. S V = ſin. V S A : ſin. V A;

Fig. 5.

V A ; vnde, cum arcus S V vi conditionis *Hallejanae* ſit conſtans, ſemper ſcilicet = 40. grad., erit ratio ſin. tot. : ſin. S V ; ideoque et ratio ſin. V S A : ſin. V A conſtans; quam ob rem arcus V A euadit maximus, ſi angulus V S A, angulus ſcilicet Eclipticae cum horizonte, ſit maximus. Euenit hoc pro regionibus terrae borealibus in plaga coeli orientali, ſi in 0° ♎; in occidentali, ſi in 0°. ♈. ſol verſetur. Si ergo circa coniunctionem Veneris cum ſole inferiorem Venus a Sole occidentem verſus diſtet 40. grad. tempore aequinoctii autumnalis, horis antemeridianis conſpectus Veneris facillimus interdiu dabitur; horis autem pomeridianis, ſi tempore aequinoctii verni Venus a Sole orientem verſus 40. grad. remota ſit. Aſt tam arctis limitibus rem comprehendere non opus eſt, ſiquidem in hoc negotio omnem rigorem attendere ſuperuacaneum eſſet. Sic phaenomeno ſatisfiet horis antemeridianis, modo, ceteris manentibus, Sol a 0°. ♎ hinc vel illinc non vltra ſignum coeleſte circiter diſtet, hoc eſt, locum Eclipticae intra 0°. ♍ et 0°. ♏ ſitum occupet; horis autem pomeridianis, modo Sol haereat intra 0°. ♓ et 0°. ♉; in his enim caſibus angulus Eclipticae cum horizonte parum differt a ſuo maximo. Haec circumſtantia quoque euincit, commodum apparitionis Veneris interdiu tempus ad ortum vel occaſum Solis praeciſe reſtringi non debere, ſed ad vnam duasue horas vel poſt Solis ortum vel ante Solis occaſum poni poſſe, modo Solis locus intra iam memoratos limites reſpectiue contineatur; ſi quidem tunc in reuolutione Sphaerae coeleſtis Ecliptica reſpectu horizontis per aliquot tempus poſitionem phaenomeno noſtro fauentem conſeruat. Accedit tandem,

rigorem

rigorem nimium quoque obſeruandum non eſſe circa elongationem Veneris a Sole $=$ 40. grad., ſed iſtam ſenſu latiori in exceſſu aliquo vel defectu accipi poſſe. His ita comparatis, ſequentes conditiones pro indicando phaenomeno noſtro, facta ad anni dies relatione, praeſcribere licebit: *Venus commode conſpicietur interdiu horis antemeridianis, ſi elongatio Veneris a Sole occidentem verſus circiter $=$ 40. grad. poſt ☌ ♀ ☉ inferiorem incidat in aliquem diem intra 23. Auguſt. et 23. Octobr. circiter ſucceſſu temporis comprehenſum; horis autem pomeridianis, ſi eiusmodi elongatio orientem verſus reſpectu Solis ante ☌ ♀ ☉ infer. die aliquo contingat intra 19. Februar. et 19. April. circiter ſito.* Facile hinc intelligitur, poſt vnam quamque Veneris reſpectu Solis et terrae periodum (584 dierum) phaenomenum noſtrum redire non poſſe, conditionibus iſtis non ſemper occurrentibus; interuallo autem octo annorum, quo Venus ad eundem reſpectu Solis et terrae ſitum in iisdem anni temporibus proxime reſtituitur, phaenomenum noſtrum redire debere. Vt omnia diſtincte oculis ſubiici poſſint, ex Ephemeridibus Manfredii dies circiter notaui, quibus ab an. 1732. vsque ad an. 1750. tum coniunctiones Veneris et Solis inferiores, tum elongationes Veneris a Sole $= 40^{\circ}$. ante vel poſt coniunctiones iſtas reſpectiue contigerunt, vnde ſequens emerſit tabula.

Elongatio ♀ris a ☉le $= 40^{\circ}$ orientem verſus reſpectu Solis horis pomeridianis conſpicua.	Coniunctio inferior Veneris et Solis.	Elongatio ♀ris a ☉le $= 40^{\circ}$ reſpectu Solis occidentem verſus horis matutinis conſpicua.
Iulii. 16. an. 1732.	- an. 1732. Auguſt. 23. -	• Septembr. 30. an. 1732.
• Febr. 27. - 1734.	- - 1734. April. 3. -	Maii 11. - 1734.
Sept. 28. - 1735.	- - 1735. Nov. 5. -	Decembr. 12. - 1735.
Maji. 6. - 1737.	- - 1737. Iunii. 12. -	Iulii. 20. - 1737.

Dec.

Dec.	14. -	1738. - -	1739.	Ianuar.	18. -	Febr.	25. -	1739.
Iulii.	14. -	1740. - -	1740	Auguſt.	21. -	*Sept.	29. -	1740.
*Febr.	24. -	1742. - -	1742.	April.	1. -	Maji.	8. -	1742.
Sept.	26. -	1743. - -	1743.	Nov.	2. -	Decembr.	9. -	1743.
Maji.	4. -	1745. - -	1745.	Iunii.	10. -	Iulii.	18. -	1745.
Dec.	12. -	1746. - -	1747.	Ianuar.	16. -	Febr.	22. -	1747.
Iulii.	12. -	1748. - -	1748.	Auguſt.	19. -	*Sept.	25. -	1748.
*Febr.	22. -	1750. - -	1750.	Mart.	29. -	Maji.	6. -	1750.

Statim haec tabula patefacit, annis 1734, 1742, 1750, criteria compet re, quae apparitioni Veneris horis pomeridianis fauen; annos autem 1732, 1740, 1748, notas continere commodum Veneris adſpectum horis matutinis indicantes; quam ob rem praedictos annos ſtellula (*) reliquis diſtinxi. Caſum poſteriorem confirmat obſeruatio noſtra, quae huic diſquiſitioni anſam dedit, conſpectus ſcilicet Veneris interdiu diebus 13, 14, 18, Octobr. 1748; eique adſtipulatur obſeruatio a me Lipſiae an. 1732, ideoque ante octennium bis elapſum habita, quam in Diario meo conſignatam reperio his verbis: „d. 24. Octobr. (ſcil. an. 1732.) hora 9. „matut. coelo ſereno ſoleque ſplendente Venerem oculis „nudis obſeruaui. D. 25. Octobr. poſt horam ſeptimam „matutinam eandem tam oculis non armatis, quam ar- „matis contemplatus ſum. Plebs portentoſam hanc ha- „buit ſtellam. „ Hoc pacto reditum huius phaenomeni circa finem Septembris vel menſe Octobri an. 1756. et ſic deinceps ſingulis octenniis praedicere licebit. Coronidis loco monendum eſſe duco, viſus praeſtantiam in hoc negotio attendi quoque debere. Pone enim obſeruatorem inſigni oculorum acie pollentem, pone exercitatum et ad videndam interdiu Venerem praeparatum, lar-

gior, accedente maxima coeli ſerenitate, iſtum forſan deprehenſurum eſſe Venerem interdiu in elongatione a Sole circiter = 40° circa ☌ ♀ ☉ infer., etiamſi ſitus Eclipticae reſpectu horizontis non prorſus faueat; et quidem eo facilius, quo propius Eclipticae poſitio reſpectu horizontis ad caſum noſtrum appropinquat; cuiusmodi, verbi cauſa, conditio in praecedenti tabula pro apparitione Veneris horis matutinis locum habere potuit menſe Iulio, tum an. 1737, tum an. 1745. Aſt circumſtantia haec diſquiſitionem noſtram non euertit; phaenomeni enim in ſenſus cuiusuis modo euidentiori ſponte incurrentis rationem reddere, et obſeruationibus corroborare allaborauimus.

Obſeruationes Meteorologicae an. 1748.

Thermometrum idem adhibui, quod in precedentium annorum obſeruationibus deſcripſi. Per integrum fere Martium frigus in his terris ſatis notabile regnauit, et Thermometrum d. 7. Mart. poſt hor. 7. matutinam oſtendebat 176½ grad.

Circa finem Iunii vsque ad medium Iulii aeſtum maxime extraordinarium, praeſertim d. 12. et 13. Iulii experti ſumus. D. 13. Iulii horis pomeridianis Thermometrum in loco vmbroſo boream verſus libero aëri expoſitum, leni ſpirante Euro (ſecundum *Vitruuii nomenclaturam*, nobis Süd-Oſt-Wind) ſequentes notabat gradus diuiſionis conſuetae

	grad. Therm.		grad. Therm.
hor. 3. 5′, —	100. $\frac{1}{3}$	hor. 4. 1′. —	100, $\frac{1}{3}$
— 30, —	99. $\frac{1}{2}$	— 22. —	100, $\frac{7}{8}$
— 43, —	99. $\frac{5}{6}$	— 45. —	101, $\frac{1}{8}$

Coelum

Coelum, quod horis antemeridianis faciem ſerenam mentiebatur, et cuius fauore Mercurius in Thermometro Soli libere expoſito vsque ad gradum 76. extendebatur, ſtatim poſt meridiem vaporibus copioſis impraegnatum fuit. Tonitrua quoque non nulla verſus hor. 6. pomerid. audita fuerunt. Tantum aeſtum 99½ grad. Thermom. reſpondentem neque Petroburgi, neque hic loci vnquam expertus ſum. Illum enim, qui an. 1738. d. 14. Iulii ſt. n. Petropoli per 103. grad. ſignatus eſt, gradibus 4½ excedit obſeruatus.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE
Eclipſium ſatellitum Iouis durante expeditione Kamtzatkienſi in diuerſis Sybiriae locis habitae a Centur. Vicario
ANDREA KRASILNIKOW.

Referente ex mandato Illustriſſimi Academiae Praeſidis Adiuncto NIC. *POPOW.*

Notanda circa has obſeruationes.

Obſeruationes, quae ſequuntur, non prorſus omnes exactae ſunt, ad eas namque inſtituendas obſeruator aliquando vnico tantum horologio vſus eſt, quod non raro ceſſabat in motu ſuo, eo ipſo tempore, quo motu eius ad tempus verum obſeruationis habitae definiendum opus erat; accedit, quod nebuloſae tempeſtates per aliquot dies durantes obſeruatorem de motu eius certum fieri non ſinebant, adeo vt tempus verum obſeruationum in illis caſibus habitarum rite determinari non potuerit. Quibus itaque temporibus hoc factum eſt, in ſequentibus indicatur aſteriſco * in margine poſito. Poſteaquam autem d. obſeruator alterum horologium a Cl. Profeſſore de *la Kroerio* ſibi traditum accepit, de tempore vero obſeruationum a ſe habitarum certior ſemper, quam prius, comparando ſe: motum eorum cum motu Solis, fieri potuit. Caeterum a 29. Martii anni 1736. ad 1*mum* Febr. 1742. idem vſus eſt in obſeruationibus ſuis tubo 14 pedes Anglicanos longo, ab illo autem tempore ad finem vſque expeditionis obſeruauit ſatellites tubo 15. pedes itidem Anglicanos longo.

ECLIPSES

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS OBSERVATAE

In Ilginskoy oſtrog.

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero die.	hor.	min′.	min″.	
1736. Mart.	29,	16	14	53	Immerſio 1*mi* obſeruatio bona.
— — Maio	7,	14	44	34	Immerſio 1*mi.* Iupiter ob nebulam tenuem eundem cingentem coloratus apparebat.
					In Kiringinskoy oſtrog.
— — Iulio	8,	13	20	5	Immerſio 1*mi.* Iouem circumdabant vapores tenues, ſatellesque in vicinia eiusdem vmbram ingrediebatur, quapropter obſeruatio haec aliqua ex parte dubia eſt.
	10,	11	18	36	Immerſio 2*di.* Coelo tranquillo et ſereno.
					In *Pago Witimsk.*
— — Auguſto	4,	11	43	4	Emerſio 2*di.* Coelo quidem ſereno, ſed Iupiter male terminatus apparebat, et ſatelles in vicinia eiusdem ex vmbra eggrediebatur,

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero dic.	hor.	min'.	min''.	
					tur, quare obſeruatio haec pro dubia reputanda eſt.
					In Oljokminskoy oſtrog.
1736. Sept.	3,	7	52	32	Emerſio 1*mi*. Obſeruatio bona.
					In Vrbe Jakuzk.
*1737. Nov.	16,	7	13	0	Emerſio 1*mi*. Iupiter propter vapores coloratus apparebat.
— — *	26,	8	15	55	Immerſio 3*tii*. Dubia ob coelum tenuibus nubibus conſperſum.
— — * Dec.	18,	3	38	40	Emerſio 1*mi*. Iouem cingebat nebula tenuis crepuſculo lucente; quare obſernatio haec dubia eſt intra aliquot minuta ſecunda.
1738. Febr.	9,	5	36	46	Emerſio 1*mi*. Iupiter propter vapores eundem circumdantes coloratus apparebat, lucente crepuſculo, quare obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
— — Iulio	25,	12	49	9	Immerſio 1*mi*. Iupiter male terminatus

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero die. hor.	min′.	min″.	
				tus apparebat, Luna in vicinia eiusdem lucente.
1738. Aug.	6, 14	27	3	Immerſio 2*di*. Coelo ſereno obſeruatio bona.
	31, 11	44	32	Immerſio 2*di*. Obſeruatio bona.
	16	54	0	Immerſio 1*mi*. Hanc obſeruationem lux crepuſculi impediebat, quare eadem aliquantisper dubia eſt.
—— Sept.	7, 14	24	13	Immerſio 2*di*. Obſeruatio bona.
	30, 13	42	48	Immerſio 3*tii*. Coelo quidem ſereno, ſed ſatelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur.
				In vrbe Jakuzk.
——* Oct.	2, 11	42	30	Immerſio 2*di*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, nihilominus tamen obſeruatio dubia propter nimiam viciniam ſatellitis Ioui.
—— *	2, 13	37	24	Immerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed propter nimiam

St : veteri	Tempore vero				
Anno, Menſe	die.	hor.	min′.	min″.	
1738. Octb.					nimiam Ioui viciniam ſatellitis obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
	13,	6	16	2	Emerſio 2*di* Iupiter tenui nebula inuoluebatur, et male terminatus apparebat parum ſupra horizontem eleuatus.
		6	41	6	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno, ſed propter nimiam Ioui viciniam ſatellitis aliquantiſper dubia.
	27,	10	29	24	Emerſio 1*mi* exacta.
		11	32	33	Emerſio 2*di*. Itidem exacta.
— - Nov.	5,	6	52	0	Emerſio 1*mi*. Coelo ſereno et tranquillo.
	12,	8	44	47	Emerſio 1*mi*. Coelum quidem ſerenitatem mentiebatur, ſed Iupiter male terminatus apparebat, praeterea accedebat ſplendor Lunae vicinae, quare obſeruatio haec dubia eſt.

Emerſio

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die hor. min′. min″.	
1738. Nov.	14, 6 5 33	Emerſio 1*mi*. Hanc obſeruationem fumus impediebat, quo Iupiter ſaepenumero tegebatur.
	19, 10 37 54	Emerſio 1*mi* exacta.
	26, 12 30 4	Emerſio 1*mi*. Dubia ob tenuem nebulam Iouem cingentem.
	28, 6 58 52	Emerſio 1*mi*. Hanc obſeruationem ventus tubum vacillando impediebat.
— — Dec.	5, 8 50 23	Emerſio 1*mi*. Iupiter non prorſus bene terminatus apparebat.
	14, 5 10 18	Emerſio 1*mi*. Coelo ſereno et tranquillo.
	18, 9 49 43	Immerſio 3*tii*. Coelo denſis vaporibus repleto, Ioueque male terminato apparente, quare obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
	21, 7 2 4	Emerſio 1*mi*.

St : veteri Anno Menſ.	tempore vero die	hor.	min′.	min″.	
					Coelo ſereno et tranquillo.
1739. Ian	6,	5	15	42	Emerſio 1*mi*.
					Coelum quidem ſerenum erat, ſed Iupiter propter vapores coloratus apparebat.
	13,	7	9	0	Emerſio 1*mi* exacta.
	23,	5	48	3	Immerſio 3*tii*.
					Coelo non prorſus ſereno et Ioue propter vapores eundem circumdantes male terminato apparente, quare obſeruatio haec pro dubia habenda eſt.
	29,	5	27	23	Emerſio 1*mi*.
					Obſeruatio bona.
					In Boiſcherezkoy oſtrog.
— — Nov.	12,	16	31	41	Immerſio 3*tii*.
					Coelo non prorſus ſereno, et Ioue male terminato apparente.
— — Dec.	3,	13	20	5	Immerſio 1*mi* exacta, Iupiter tamen non nihil coloratus apparebat.
	6,	16	56	6	Immerſio 2*di*.
					Coelo quidem ſereno ſed

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die hor. min′. min″.	
		ſed obſeruationem ventus impediebat, et ſatelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur.
1739. Dec.	10, 15 9 14	Immerſio 1*mi.* Hanc obſeruationem ventus tubum vacillando impediebat, et ſatelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur, quare eadem pro dubia haberi debet.
	11, 8 16 32	Immerſio 3*tii.* Coelo ſereno et tranquillo, obſeruatio bona.
	12, 9 38 3	Immerſio 1*mi.* Dubia aliquantiſper ob viciniam ſatellitis Ioui.
	28, 10 2 15	Emerſio 1*mi.* Coelum erat tenuiſſimis nubeculis conſperſum, et Iupiter coloratus apparebat.
		In vrbe Portus Petri et Pauli dicta.
1741. Ian.	23, 8 5 36	Immerſio 3*tii.* Hanc obſeruationem ventus impediebat et

 Iupiter

St: veteri Anno, Menſ.	tempore vero die	hor.	min′.	min″.	
					Iupiter ob vapores coloratus apparebat.
1741. Ian.	23,	11	7	22	Emerſio 3*tii*. Iupiter ob vapores coloratus conſpiciebatur.
	25,	13	44	26	Emerſio 2*di* exacta.
	27,	12	9	25	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno ſed ♃ vaporibus erat inuolutus et male terminatus conſpiciebatur, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper eſt.
	29,	6	38	13	Emerſio 1*mi*. Vento tubum multum vacillante.
	30,	12	5	30	Immerſio 3*tii*. Coelum erat vaporibus repletum et Iupiter male terminatus apparebat.
— — Febr.	5,	8	33	26	Emerſio 1*mi* exacta.
	12,	8	20	53	Emerſio 2*di* exacta. Non obſtante tubi vacillatione a vento.
		10	28	49	Emerſio 1*mi*. Ventus tubum non nihil vacillabat.

In

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die	hor.	min′.	min″.	
					In Bolſcherezkoy oſtrog.
1741 *Mart.	23,	9	3	56	Emerſio 1*mi.* Coelo hinc inde tenuibus nubeculis conſperſo.
		10	55	2	Emerſio 2*di.* Coelum erat tenuibus nubeculis cunſperſum et Iupiter male terminatus apparebat, quare obſeruatio haec dubia eſt.
— — Sept.	5,	15	47	16	Immerſio 1*mi.* Iupiter ob vapores male terminatus apparebat.
— — *Octob.	15,	15	27	36	Emerſio 3*tii.* Ob nebulam ſpiſſiuſculam aliquantiſper dubia.
	23,	14	17	23	Immerſio 4*ti.* Iupiter ob vapores coloratus apparebat.
— — Nov.	15,	10	51	33	Immerſio 1*mi.* Iupiter ſupra horizontem parum erat eleuatus et male terminatus conſpiciebatur, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper eſt.
	16,	11	5	11	Immerſio 2*di.* Luna in vicinia. Iouis lucente.
	27,	11	40	3	Immerſio 3*tii* exacta.

St: veteri Anno. Menſe.	tempore vero die hor min′. min″.	
1741. Nov.	27, 15 10 59	Emerſio 3tii. Coelo quidem ſereno et tranquillo, nihilominus tamen obſeruatio haec ob viciniam ſatellitis Ioui dubia eſt.
— — Dec.	29, 13 46 42	Immerſio 4ti. Obſeruationem ventus tubum vacillando impediebat, quare eadem pro dubia reputanda eſt.
	31, 10 51 58	Immerſio 1mi exacta.
1742. Ian.	5, 18 15 38	Immerſio 1mi. Iupiter vaporibus erat circumdatus, et male terminatus apparebat, ſatellesque in vicinia Iovis vmbram ingrediebatur, quare obſeruatio haec pro dubia reputabatur.
	7, 12 43 37	Immerſio 1mi. Coelum hinc inde tenuibus nubeculis conſperſum erat, et ſatelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur. *Ab hinc vſus eſt obſervator tubo 15½ pedes Anglicanos longo.*

Emerſio

St: veteri Anno, Menſe.	Tempore vero die hor. min′. min″.	
1742. Febr.	1, 6 20 49	Emerſio *4ti* exacta.
	10, 5 59 47	Emerſio *1mi* exacta.
	22, 15 23 15	Emerſio *1mi*. Dubia aliquantiſper ob Iouem a vaporibus male terminatum.
— — April.	27, 8 51 33	Emerſio *1mi*. Obſeruatio bona.
		In Portu Ochozk.
— — Nov.	2, 14 45 34	Immerſio *1mi*. Coelo quidem ſereno, ſed ob paruam eleuationem Iouis ſupra horizontem et ſplendorem Lunae obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
	9, 16 38 14	Immerſio *1mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed ſplendor Lunae obſeruationem non nihil impediebat.
	12, 19 6 38	Immerſio *4ti*. Coelo quidem ſereno, ſed motus valde tardus ſatellitis obſeruationem circa aliquot ſecunda incertam reddidit.
	13, 13 50 43	Immerſio *3tii*. Iupiter parum ſupra horizon-

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die	hor.	min′.	min″.	
					rizontem eleuatus erat, coloratusque apparebat, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper eſt.
1742. Nov.	13,	17	19	37	Emerſio 3*tii*. Coelo ſereno ſed Iupiter interdum male terminatus apparebat.
	29,	17	20	20	Emerſio 4*ti*. Aër erat turbidus, Iupiterque male terminatus conſpiciebatur, et praeterea ventus tubum vacillabat, quare obſeruatio haec non prorſus exacta eſt.
— — Dec.	1,	16	50	22	Immerſio 2*di*. Coelum erat nubibus tenuiſſimis conſperſum, et Iupiter male terminatus apparebat.
	2,	16	37	12	Immerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno, ſed vapores a ſuperficie maris aſcendentes Iouem male terminatum, et obſeruationem dubiam effecerunt.
	8,	19	20	5	Immerſio 2*di*. Eam ventus tubum va-

cillan-

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
		cillando impediebat.
1742. Dec.	9, 18 26 11	Immerſio 1*mi.* Coelum tenuibus nubibus hinc inde et in loco etiam ♃ conſperſum erat, quare obſeruatio haec intra aliquot ſecunda dubia eſt.
	11, 12 54 46	Immerſio 1*mi.* Iupiter ob vapores a mari aſcendentes male terminatus apparebat, quare obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
	16, 11 10 53	Emerſio 4*ti.* Coelo quidem ſereno, ſed Iupiter parum ſupra horizontem erat eleuatus, et ob vapores male terminatus apparebat, quare obſeruatio haec dubia eſt.
	20 17 23	Immerſio 1*mi.* Hanc obſeruationem ſplendor crepuſculi impediebat.
	18, 14 44 59	Immerſio 1*mi.* Iupiter a vaporibus coloratus apparebat.
	25, 16 35 27	Immerſio 1*mi.*

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
				Coelo tranquillo et ſereno.
1742. Dec.	26, 13	19	33	Immerſio 3*tii* exacta.
	13	33	49	Immerſio 2*di* exacta.
	16	44	46	Emerſio 3*tii* exacta.
	27, 11	2	55	Immerſio 1*mi*. Iupiter a vaporibus male terminatus apparebat parum ſupra horizontem eleuatus, quare obſeruatio haec dubia eſt circa aliquot ſecunda.
1743. Ian.	3, 12	54	5	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno, ſed Luna Iouem aliquantiſper illuſtrante.
	10, 14	45	15	Immerſio 1*mi*. Dubia non nihil ob Iouem male terminatum.
	17, 16	37	8	Immerſio 1*mi*. Ioue male terminato.
	19, 11	5	25	Immerſio 1*mi* exacta.
	20, 10	21	34	Immerſio 2*di* exacta.
	24, 18	29	48	Immerſio 1*mi* exacta.
	26, 12	58	50	Immerſio 1*mi*. Coelo tranquillo et ſereno.
—— Febr.	3, 15	27	19	Immerſio 2*di*. Coelo ſereno ſed vento tubum non nihil vacillante.

Immer-

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′	min″	
1743. Febr.	4, 9	21	0	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno.
	7, 12	58	58	Immerſio 3*tii*. Coelo ſereno et tranquillo.
	11, 11	15	43	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno et tranquillo, ſed ſatelles in vicinia ♃ vmbram ingrediebatur.
	20, 9	55	43	Emerſio 1*mi*. Dubia aliquantiſper ob viciniam ſatellitis Ioui.
*	27, 11	51	14	Emerſio 1*mi*. Coelo tenuibus nubeculis conſperſo, et Luna ſplendente, quare obſeruatio haec pro dubia non nihil habenda eſt.
— — April.	7, 10	20	17	Emerſio 1*mi*. Coelo tranquillo et ſereno.
	29, 10	15	54	Emerſio 4*ti* exacta.
	30, 10	36	4	Emerſio 1*mi* exacta.
— — Maio.	7, 12	31	7	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed Iupiter male terminatus apparebat parum ſupra horizontem eleuatus, qua-

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.			
				re obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
				In vrbe Iakuzk.
1743 *Dec.	5 , 11	36	57	Immerſio 1*mi.* Coelo quidem ſereno, ſed in regione Iouis tenuis nebula conſpiciebatur.
1744. * Ian.	24 , 14	56	26	Immerſio 3*tii.* Coelo ſereno, ſed Iupiter interdum male terminatus apparebat.
	17	43	44	Emerſio 3*tii.* Iupiter interdum a vaporibus valde coloratus apparebat, adeo vt colores ad ſatellitem vsque pertingebant, quare obſeruatio haec dubia eſt.
- - Febr.	7 , 11	18	35	Immerſio 1*mi.* Coelo quidem ſereno, ſed Iupiter ob vapores non nihil deformis apparebat, quare haec obſeruatio pro dubia aliquantiſper reputabatur.
	22 , 10	31	11	Immerſio 2*di* exacta.
	29 , 10	50	51	Immerſio 3*tii* exacta.
	13	6	54	Immerſio 2*di* exacta.
- - Martio.	1 , 11	33	0	Immerſio 1*mi* exacta.

Emerſio

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1744 *Mart.	26, 8 32 22	Emerſio 1*mi.* Dubia ob ventum et aërem turbidum.
- - * April.	5, 9 24 11	Emerſio 3*tii.* Coelo quidem ſereno, ſed Iouem cingebat nebula tenuis, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper viſa eſt.
	9, 12 23 58	Emerſio 1*mi.* Coelo tranquillo et ſereno.
	18, 8 49 15	Emerſio 1*mi.* Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed ſplendor crepuſculi obſeruationem dubiam aliquantiſper reddidit.
*	25, 10 44 57	Emerſio 1*mi* exacta.
		In vrbe Ieniſeysk.
- - * Dec.	30, 18 56 13	Immerſio 1*mi.* Fumus ab aedificiis aſcendens hanc obſeruationem dubiam reddidit circa aliquot ſecunda.
1745 * Ian	10, 17 58 14	Immerſio 2*di.* Dubia ob Coelum multis tenuibus nubeculis conſperſum.
	15, 17 5 50	Immerſio 1*mi* exacta.

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
1745. Ian.	31, 15	18	55	Immerſio 1*mi* exacta.
– – Febr.	4, 14	57	46	Immerſio 2*di*. Coelo tranquillo et ſereno.
	7, 17	12	7	Immerſio 1*mi*. Coelo quidem ſerenitatem mentiente, ſed in regione Iouis tenuiſſima nebula haerebat, quae et Iouem deformem et obſeruationem dubiam aliquantiſper reddidit.
				In vrbe Tomsk.
*	23, 15	2	17	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno ſed Ioue male terminato, quare obſeruatio haec dubia aliquantulum eſt.
– – * April.	2, 11	13	30	Immerſio 2*di*. Aër turbidus Iouem deformem reddebat, et ſatellitem interdum prorſus ex oculis eripiebat, quare obſeruatio haec dubia eſt.
	5, 14	40	6	Immerſio 3*tii* exacta.
	9, 13	49	8	Immerſio 2*di*. Dubia ob aërem vaporibus a ſuperficie Terrae aſcen-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
				aſcendentibus repletum.
1745 April.	10, 15	31	37	Immerſio 1*mi*. Dubia ob paruam elevationem Iouis ſupra horizontem Iouemque ob vapores male terminatum.
	12, 10	2	12	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno et tranquillo, ſed ipſum momentum immerſionis ob viciniam ſatellitis Ioui difficile erat determinatu.
	27, 10	36	36	Emerſio 2*di*. Dubia aliquantinſper ob vapores, qui Iouem parum deformem reddiderunt.
	28, 10	29	36	Emerſio 1*mi*. Iupiter coloratus apparebat in hac obſeruatione.
-- * Maio.	4, 13	6	13	Emerſio 2*di* exacta.
	29, 10	2	25	Emerſio 2*di* exacta.
				In Caſtello Iamyſchewsk.
-- Iun.	29, 8	36	51	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed ſplendor cre-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′ min″.	
		crepuſculi obſeruationem impediebat, quare eadem pro dubia non nihil habenda eſt.
1745. Iunio.	30, 9 1 30	Emerſio 2*di*. Obſeruatio bona.

Comparatis praemiſſis obſeruationibus Eclipſium 1*mi* ſatellitis Iouis cum ſimilibus obſeruationibus eiusdem Petropoli habitis per vnam tamen vel duas aut etiam tres reuolutiones differentibus, quippe quas eodem tempore ob nimiam diſtantiam locorum Sybiriae a Petroburgo inſtituere non licuit, differentiae meridianorum ſequentium Sybiriae locorum deductae ſunt. Idque modo ſequenti, ſc:

1mo Kiringinskoy oſtrog a Petroburgo.
5^h 10′ 51″

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1736. Iulio.	6, 13 40 43	Immerſio 1*mi* Petropoli obſeruata, coelo ſereno, tubo 15 pedes Pariſinos longo.
	1, 18 28 34	Reuolutio 1*mi* ex tabulis.
	8, 8 9 17	Immerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	8, 13 20 5	Eadem Immerſio in Kirin-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1736. Iul.		ginskoy oſtrog obſeruata tubo 14 pedes Anglicanos longo dubia aliquantiſper ob aërem turbidum viciniamque ſatellitis Ioui.
	5 10 48	Differentia meridianorum Kiringinskoy oſtrog a Petroburgo, ad quam adiici debent 3″ propter incertitudinem obſeruationis in Kiringinskoy oſtrog habitae, et prodibit differentia meridianorum illorum vera 5^h 10′ 51″.

2do Vrbis Iakuzk a Petroburgo.
6^h 37′ 24″

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
		Obſeruatio 1ma.
1737. Nov.	14, 6 7 35	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata tubo catadioptrico, dubia circa 15″ propter aërem turbidum.
	1, 18 28 17	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die,	hor.	min′.	min″.	
1737. Nov.	16,	0	35	52	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	16,	7	13	0	Eadem emerſio in vrbe Iakuzk tubo 14 pedes obſeruata.
		6	37	8.	Differentia meridianorum Petropolin inter et Iakuzkum, ad quam additis 15″ propter incertitudinem emerſionis a nebula factam et inſuper 8″ ob differentiam tuborum, prodibit differentia meridianorum vera ſeu correcta 6^h 37′ 31″.
					Obſeruatio 2da.
1738. Iulio.	23,	11	39	45;	Immerſio 1*mi* Petropoli diuerſis tubis obſeruata, ex omnibusque media, obſtante aliquantiſper obſeruationi nebula.
	1,	18	28	50	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	25,	6	8	35	Immerſio 1*mi.* Petropoli obſeruanda.
	25,	12	46	9	Eadem Immerſio Iakuzki obſeruata.
		6	37	34	Differentia meridianorum.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
		rum Petropolitani a Ia-kuzkenſi.
		Obſeruatio 3tia.
1738. Dec.	19, 5 56 19	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata.
	1, 18 28 5	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	21, 0 24 24	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	21, 7 2 4	Eadem emerſio Iakuzki obſeruata.
	6 37 40	Differentia meridiano-rum Petropolitani a Ia-kuzkenſi.
		Obſeruatio 4ta.
1739. Ian.	11, 6 3 15	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata.
	1, 18 28 53	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	13, 0 32 8	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	13, 7 9 0	Eadem Emerſio Iakuzki obſeruata.
	6 36 52	Differentia meridiano-rum inter Petropolin et Iakuzkum. Si autem media ex omnibus qua-tuor ſumatur, prodibit eadem $6^h\ 37'\ 24''$.

3*tio*

3tio Portus Petri et Pauli a Petroburgo.
$8^h\ 33'\ 0''$.

St: veteri Anno Menſe.	tempore vero die	hor.	min'.	min''.	
1741. Febr	3,	5	31	35	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata tubo *Neutoniano* 7 pedes longo.
	5,	7	26	23	Tres reuolutiones ſatellitis, ex tabulis.
-- Ianuario	28,	22	5	12	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	29,	6	38	13	Eadem Emerſio in Portu Petri et Pauli obſeruata.
		8	33	1	Differentia meridianorum inter Portum Petri et Pauli atque Petroburgum.
					Obſeruatio 2da.
-- Februario.	3,	5	31	35	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata
	1,	18	28	54	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	5,	0	0	29	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	5,	8	33	26	Eadem Emerſio in Portu Petri et Pauli obſeruata.
		8	32	57	Differentia meridianorum inter Portum Petri et

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1741. Febr.		et Pauli atque Petroburgum. Media ex his differentiis erit 8ʰ 32′ 59′ ſeu rotunde 8ʰ 33′ 0″.

4to Borſcherezkoy oſtrog a Petroburgo.
$8^h\ 27'\ 57''$.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1741. Mart.	23, 9 3 56	Emerſio 1*mi* in Bolſcherezkoy oſtrog obſeruata.
	5, 7 30 51	Tres reuolutiones ſatellitis ex tabulis.
	28, 16 34 47	Emerſio 1*mi* in Bolſcherezkoy oſtrog obſeruanda.
	28, 8 6 50	Eadem emerſio Petropoli obſeruata tubo catadioprico 5 pedes longo.
	8 27 57	Differentia meridianorum Bolſcherezkoy oſtrog inter et Petroburgum.

5to Portus Ochozkenſis a Petroburgo.
$7^h\ 31'\ 34''$.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
1743. Ian.	15, 14	37	36	Immerſio 1*mi* Petroburgi tubo catadioptrico 5 pedes longo obſeruata.
	1, 18	28	3	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	17, 9	5	39	Immerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	17, 16	37	8	Eadem immerſio in Portu Ochozk obſeruata.
	7	31	29	Differentia meridianorum Ochozkenſis a Petropolitano.
				Obſeruatio 2da.
- - Ian.	15, 14	37	36	Immerſio 1*mi* Petropoli obſeruata.
	3, 12	56	11	Duae Reuolutionis ſatellitis ex tabulis.
	19, 3	33	47	Immerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	19, 11	5	25	Eadem immerſio in Portu Ochozkenſi obſeruata.
	7	31	38	Differentia meridianorum Ochozkenſis a Petropolitano. Media autem earum eſt $7^h\ 31'\ 34''$.

6to

6to Iudomskoy kreſt a Petroburgo.
$7^h\ 18'\ 14''$.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die,	hor.	min'.	min''.	
					Obſeruatio 1ma.
1743. Aprili.	5	8	32	51	Emerſio *1mi* Petroburgi tubo catadioptrico 5 pedes longo obſeruata.
	1,	18	29	7	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	7,	3	1	58	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	7,	10	20	15	Eadem emerſio in Iudomskoy kreſt obſeruata.
		7	18	17	Differentia meridianorum Iudomſcenſis a Petroburgenſi.
					Obſeruatio 2da.
— — Aprili.	28,	8	49	12	Emerſio *1mi* Petropoli eodem tubo catadioptrico obſeruata crepuſcolo nimis lucente.
	1,	18	28	47	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	30,	3	17	59	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	30,	10	36	4	Eadem Emerſio in Iudomskoy Kreſt. obſeruata:
		7	18	5	Differentia meridianorum

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
1743. April.				rum Iudomſcenſis a Petrobargen.i, ſubtractis autem ab obſeruatione poſteriori Petropoli habita ob nimium ſplendorem crepuſculi 5″. Media differentia meridianorum illorum ex vtraque deducetur 7^h 18′ 14″.

7mo Vrbis Tomsk a Petroburgo.
3^h 38′ 38″.

St : veteri Anno, Menſe	tempore vero die, hor.	min′	min″.	
1745. April.	26 , 12	22	20	Emerſio 1*mi* Petropoli tubo catadioptrico 5 pedes longo obſeruata, dubia aliquantiſper ob nimiam ſatellitis viciniam Ioui.
	1 , 18	28	38	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	28 , 6	50	58	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	28 , 10	29	36	Eadem emerſio in vrbe Tomsk obſeruata.

Differen-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die.	hor	min′.	min″	
1745. Aprili.		3	38	38	Differentia meridianorum Tomscenſis a Petroburgenſi, additis autem ad obſeruationem Petropoli habitam 5″ ob nimiam viciniam ſatellitis Ioui prodibit differentia meridianorum ad veram propius accedens $3^h\ 38'\ 33''$.

FINIS.

Fig. 2

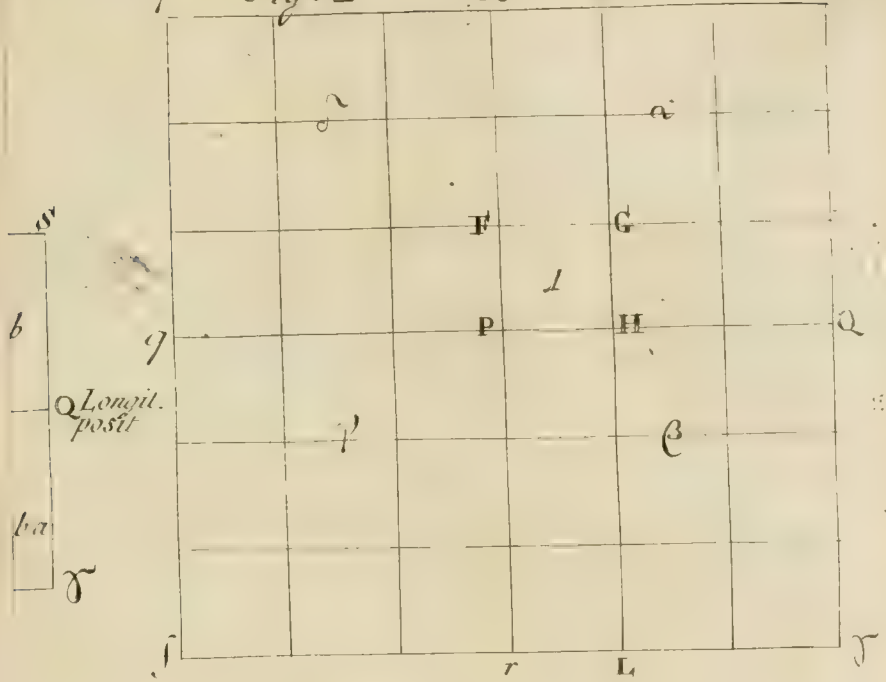


Fig. 4.

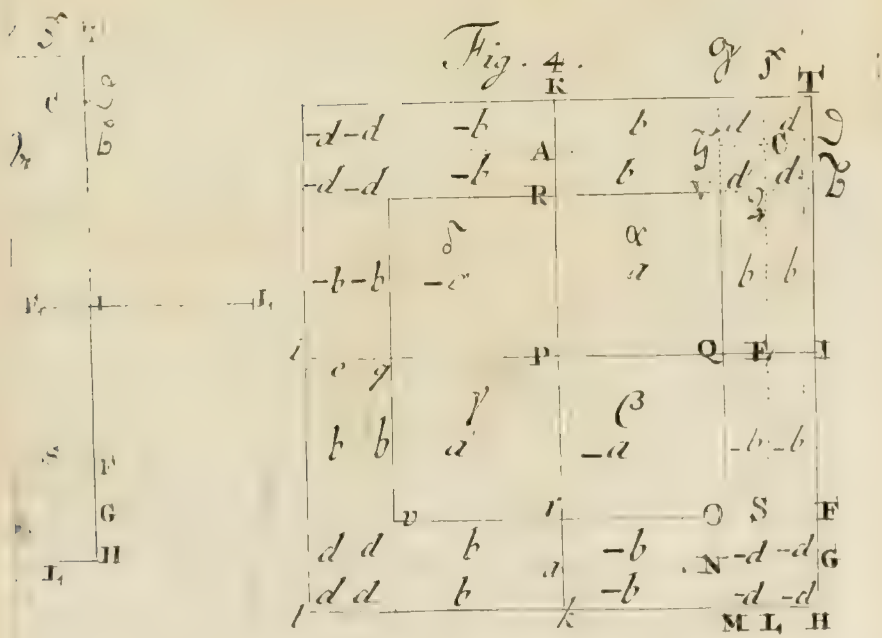


Fig. 1.

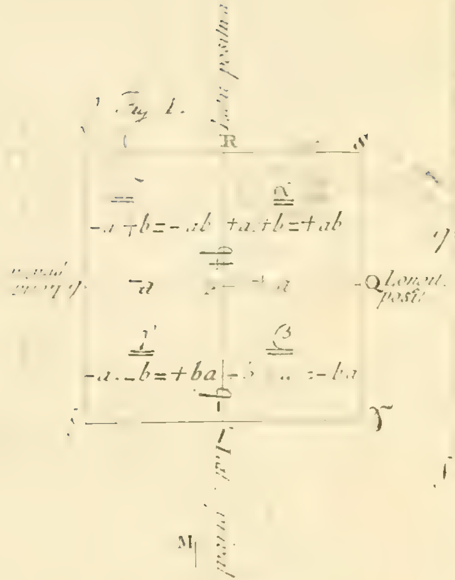


Fig. 2.



Fig. 3.

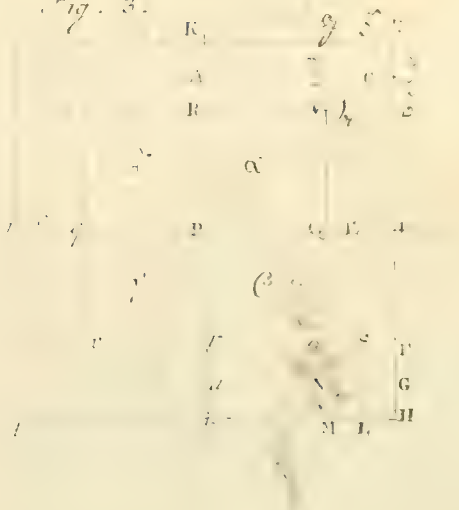
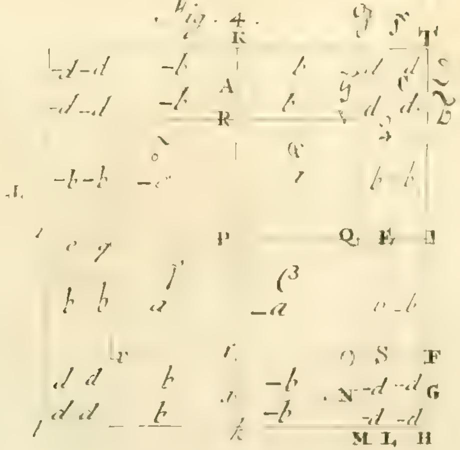


Fig. 4.



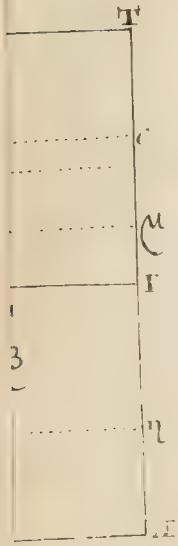
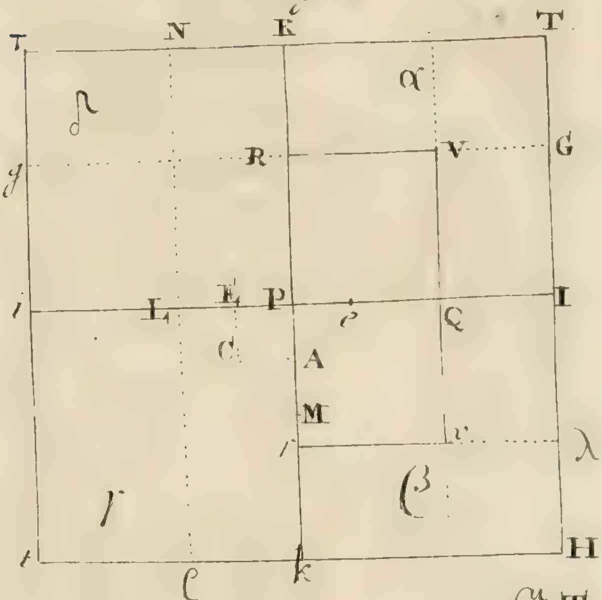


Fig. 6.



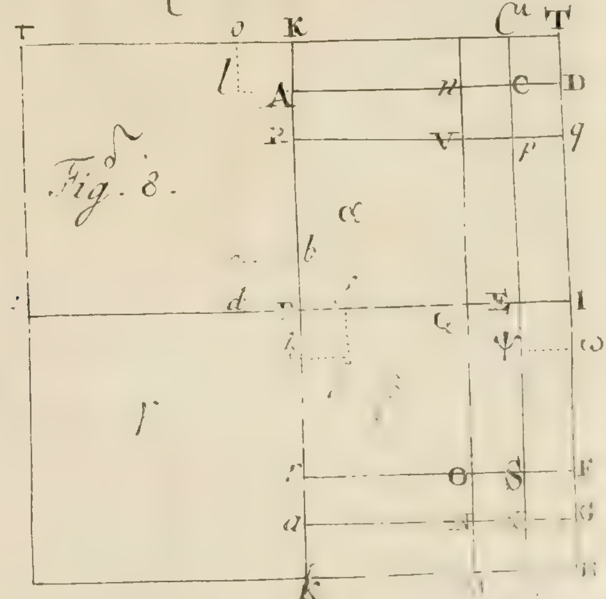


Fig. 8.

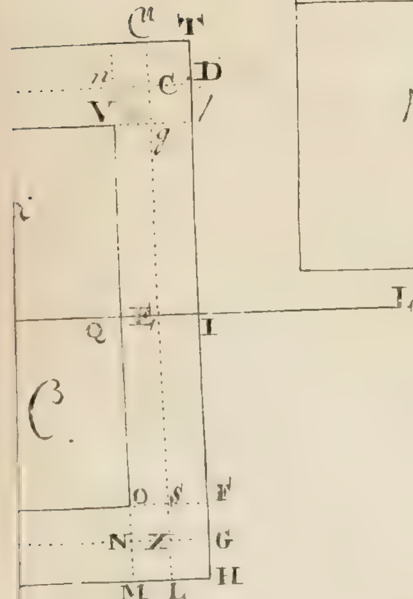


Fig. 5.

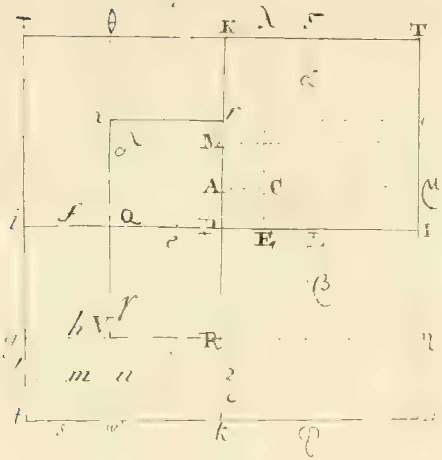


Fig. 6.



Fig. 7.

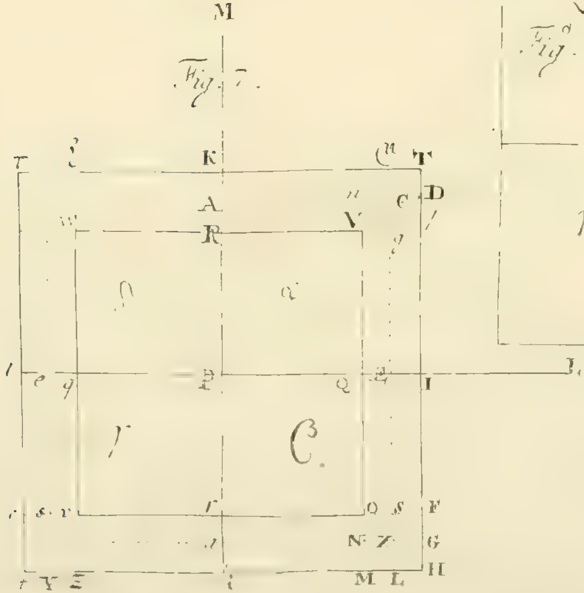
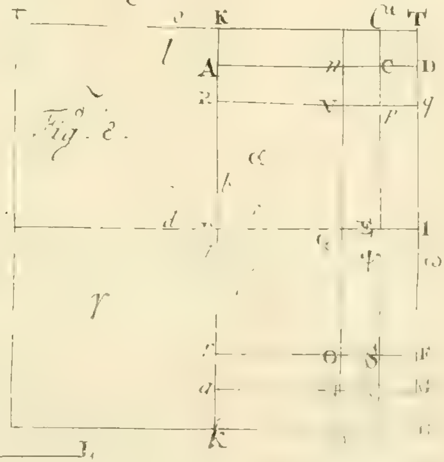


Fig. 8.



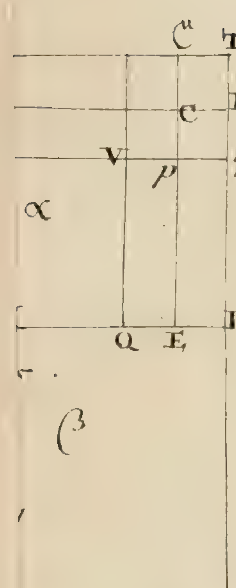

T
D
C
V
q
p
α
Q
E
I
β

Fig. 10.

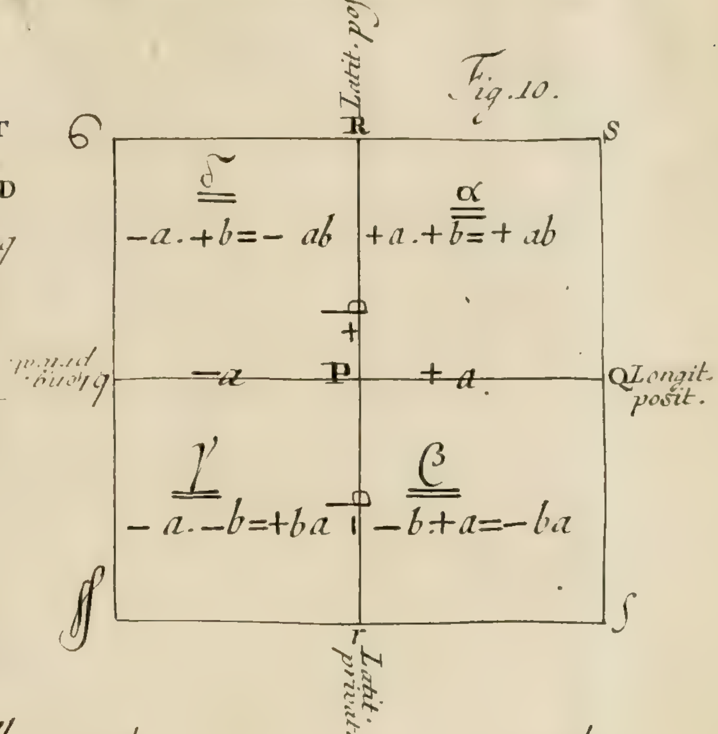

Latit. poſ.
R
S
δ
−a.+b=− ab
α
+a.+b=+ ab
−a
P
+a
Q Longit. poſit.
γ
−a.−b=+ba
β
−b.+a=−ba
r
Latit. priv.

Fig. 11.

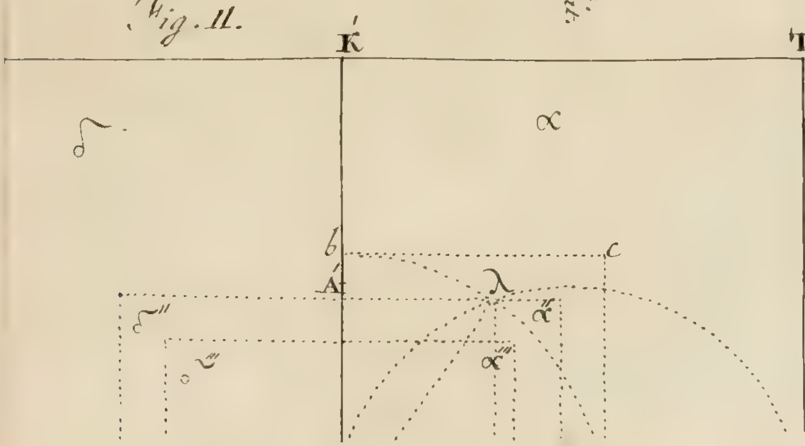

K′
T′
α
δ
b
c
A′
λ
α″
α‴

Fig. 9.

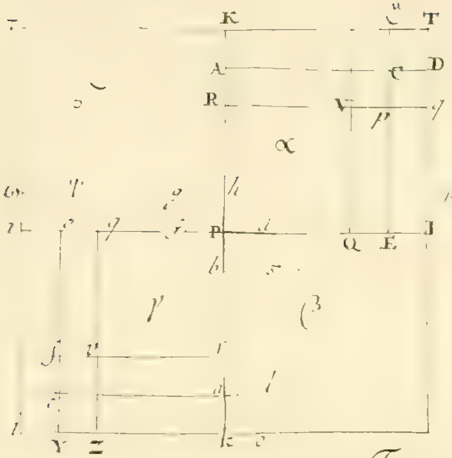


Fig. 10.

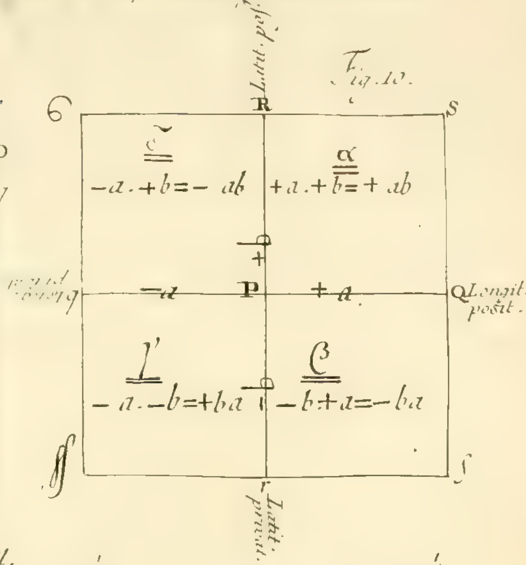
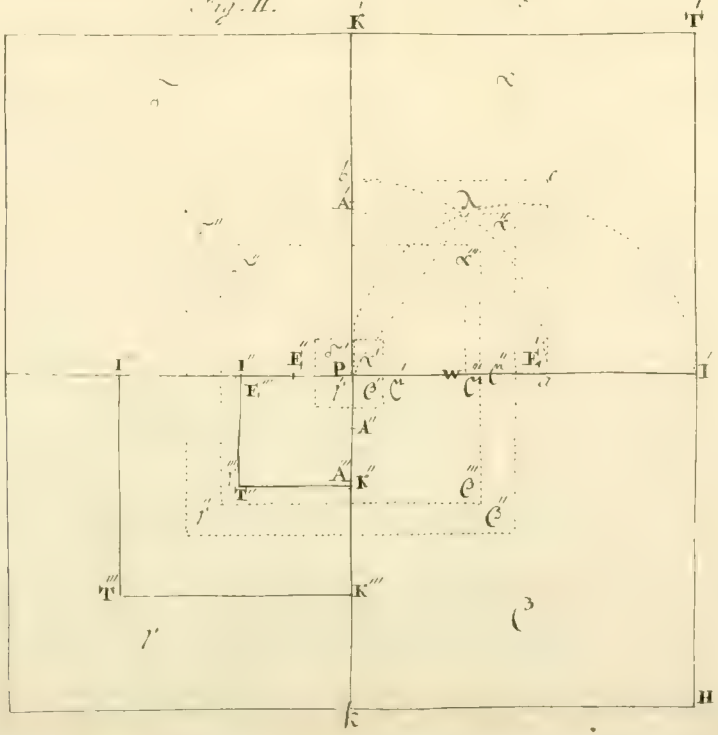


Fig. 11.



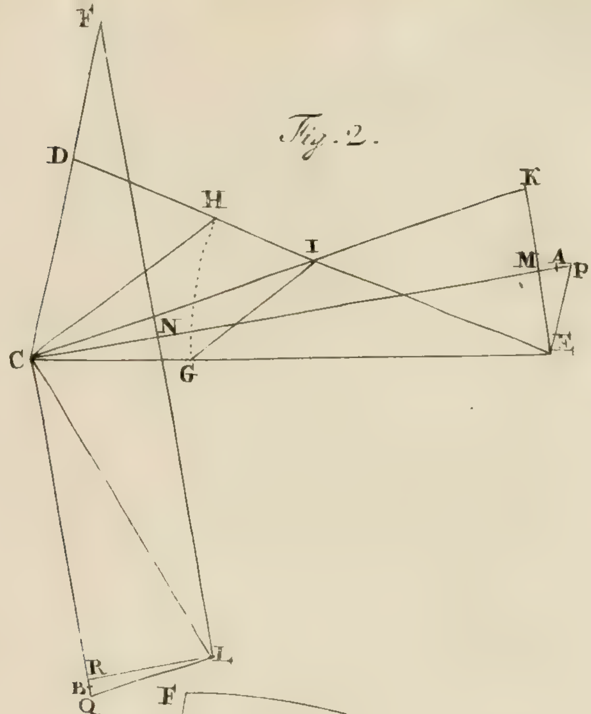


Fig. 2.

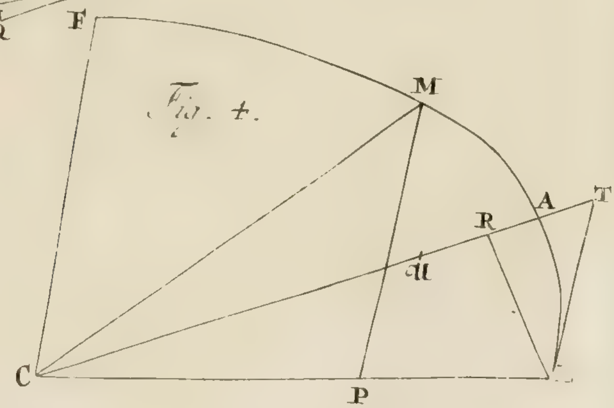


Fig. 4.

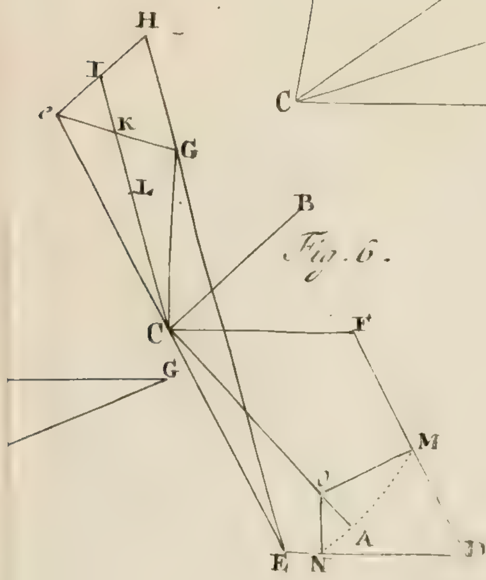
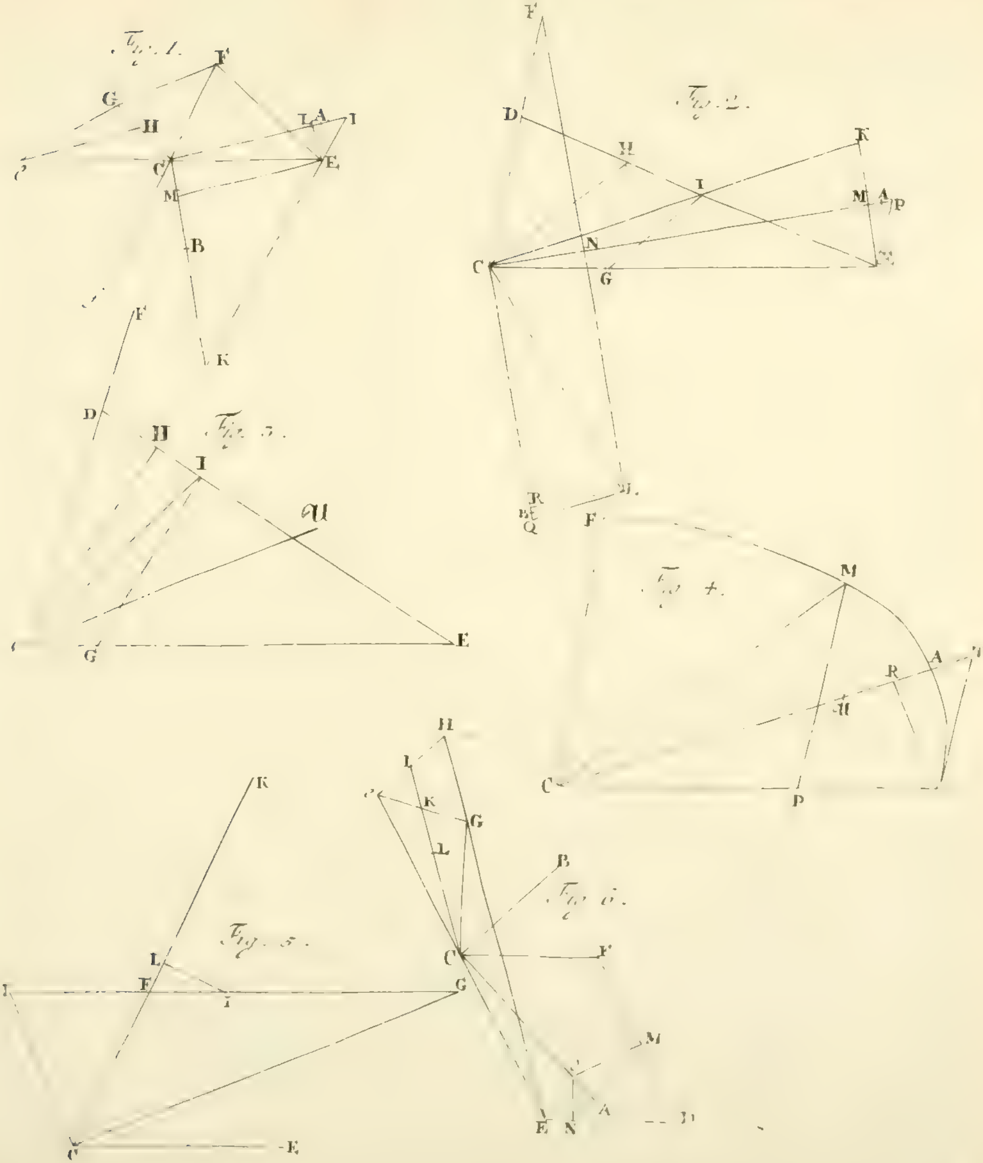


Fig. 6.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

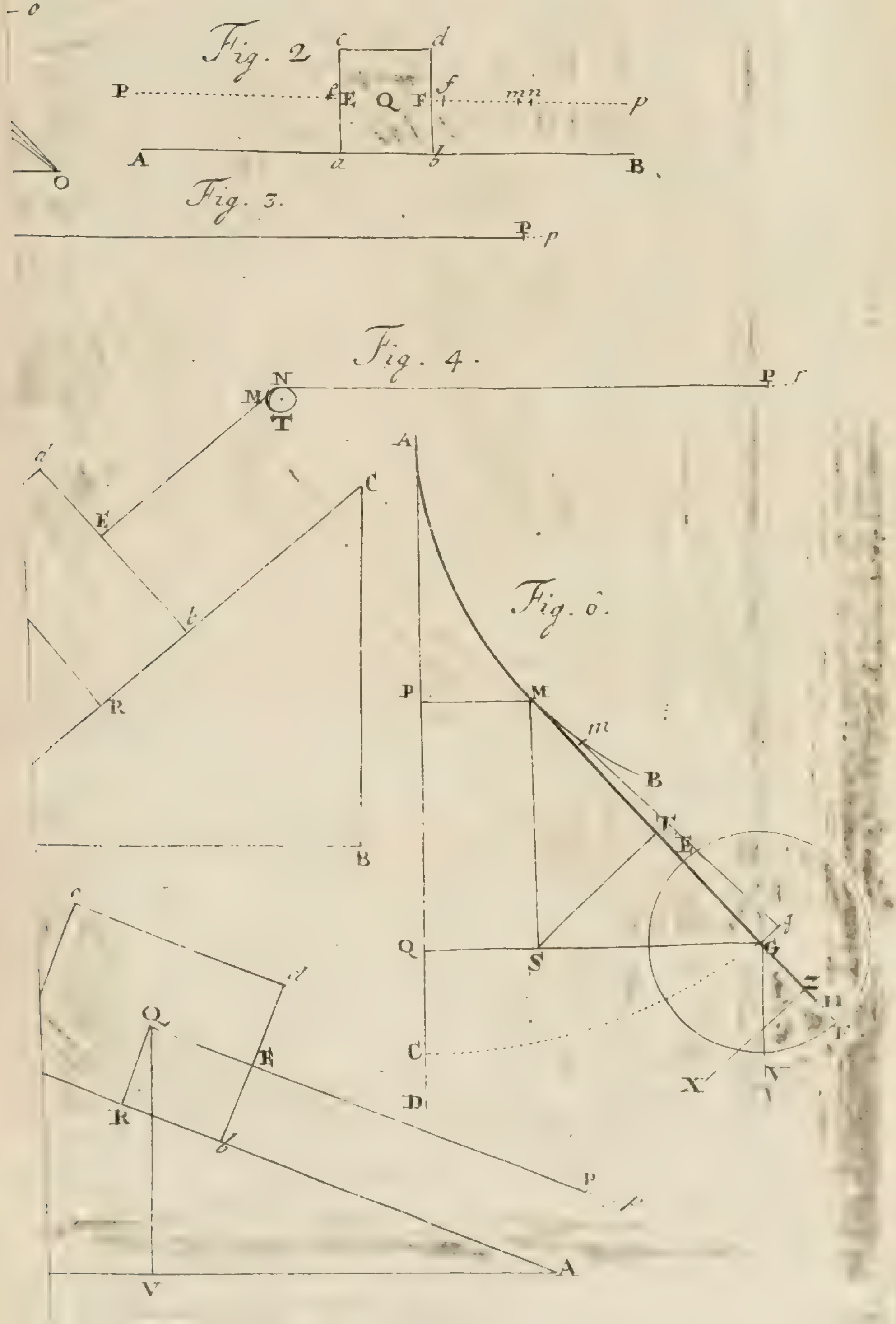
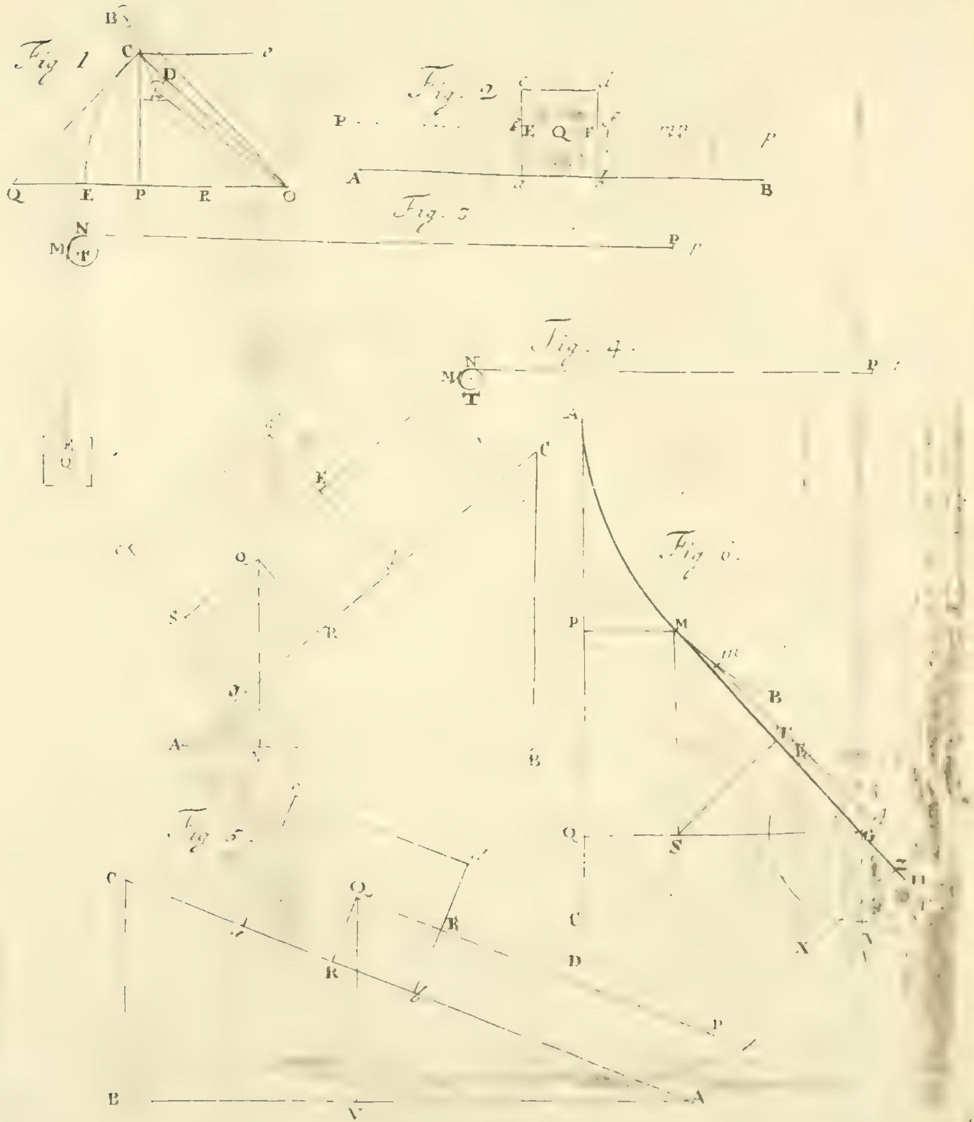


Fig. 2

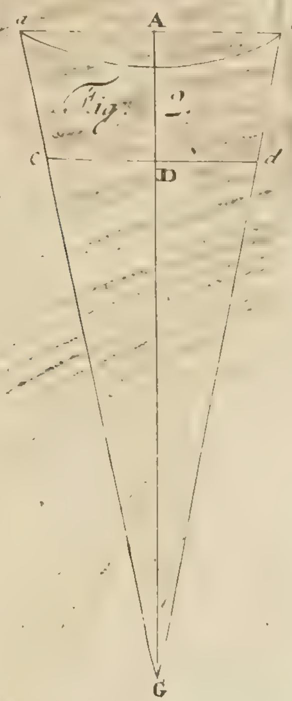
Fig. 3.

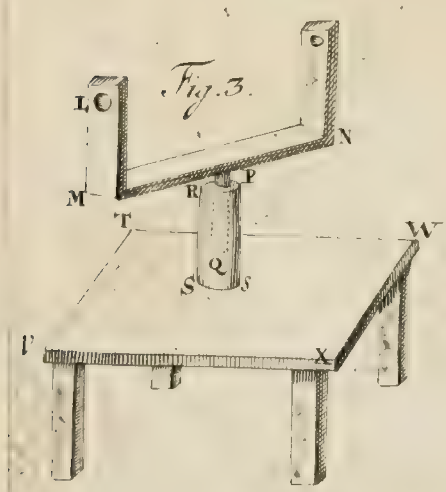
Fig. 4.

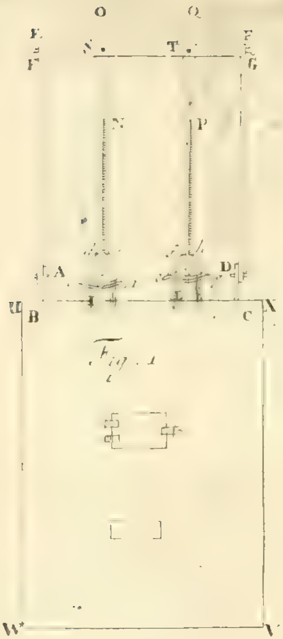
Fig. 6.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6


F
G
D
C
X
V


a
A
b
Fig. 2.
c
D
d
G


Fig. 3.
L
N
M
R
P
T
W
Q
S
s
X


O
Q
E
F
S
T
G
N
P
A
D
B
C
X
Fig. 1
W
V


A
Fig. 2
D
G

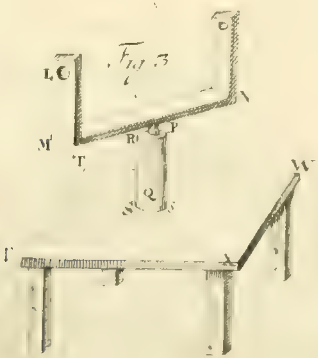
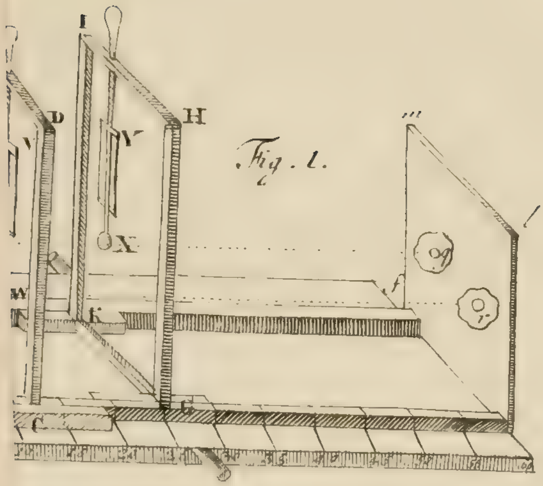

O
Fig. 3
L
M
R
P
T
Q
S
W
X

Fig. 1.



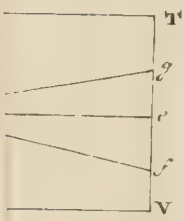


Fig. 2.

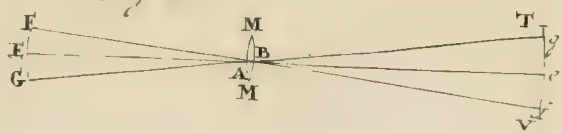
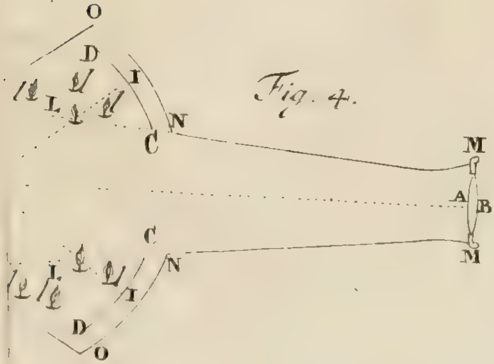


Fig. 4.



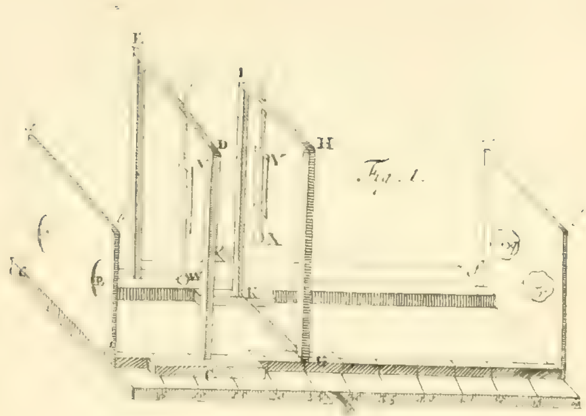


Fig. 1.

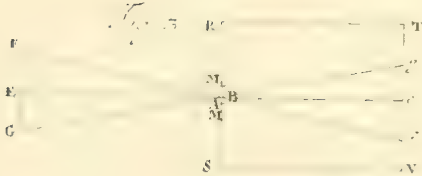


Fig. 3.

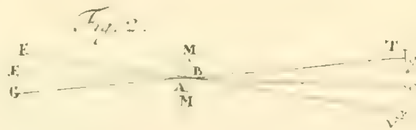


Fig. 2.

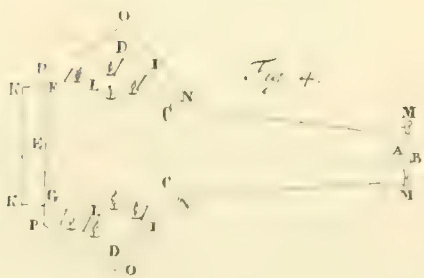
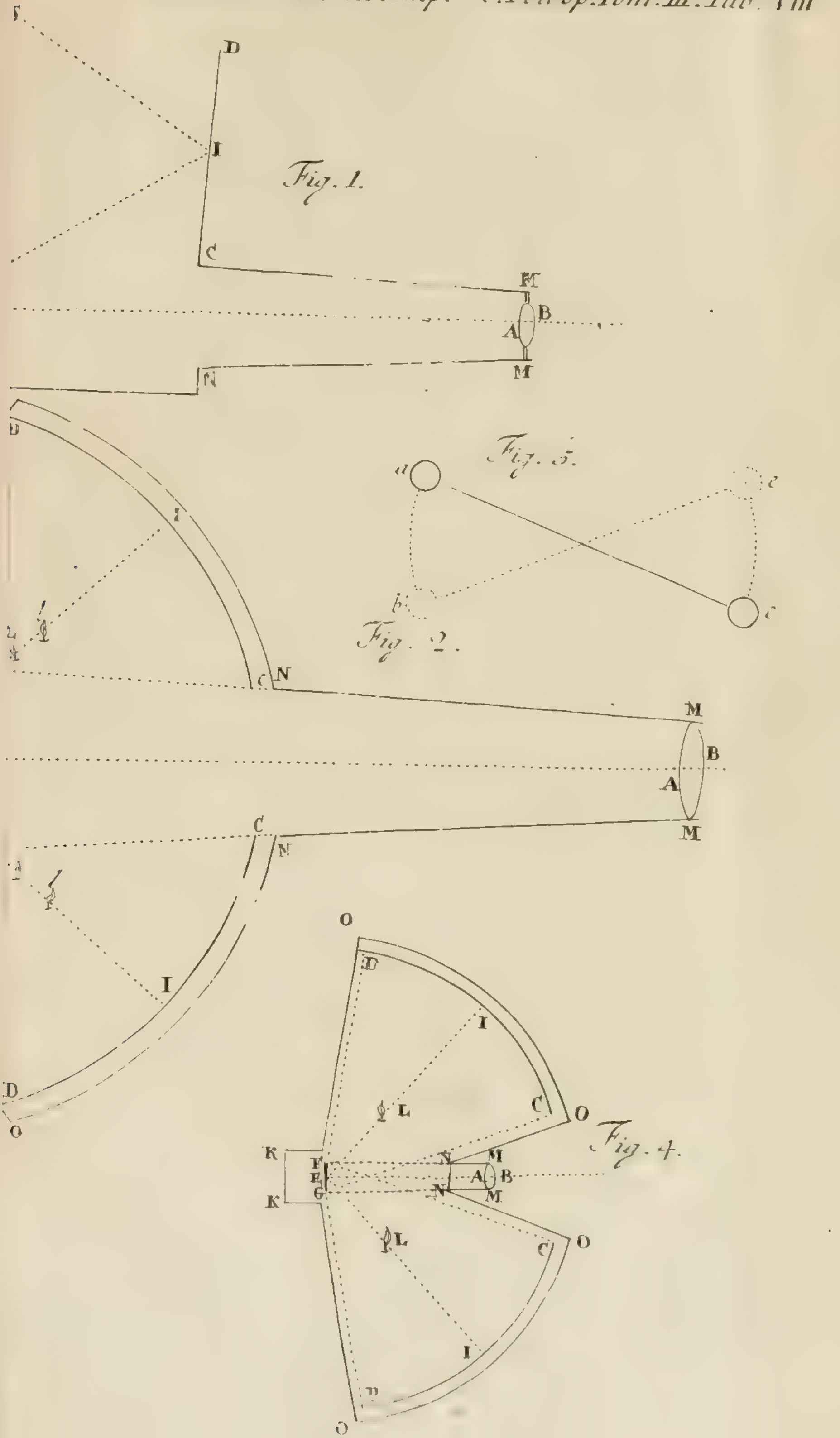
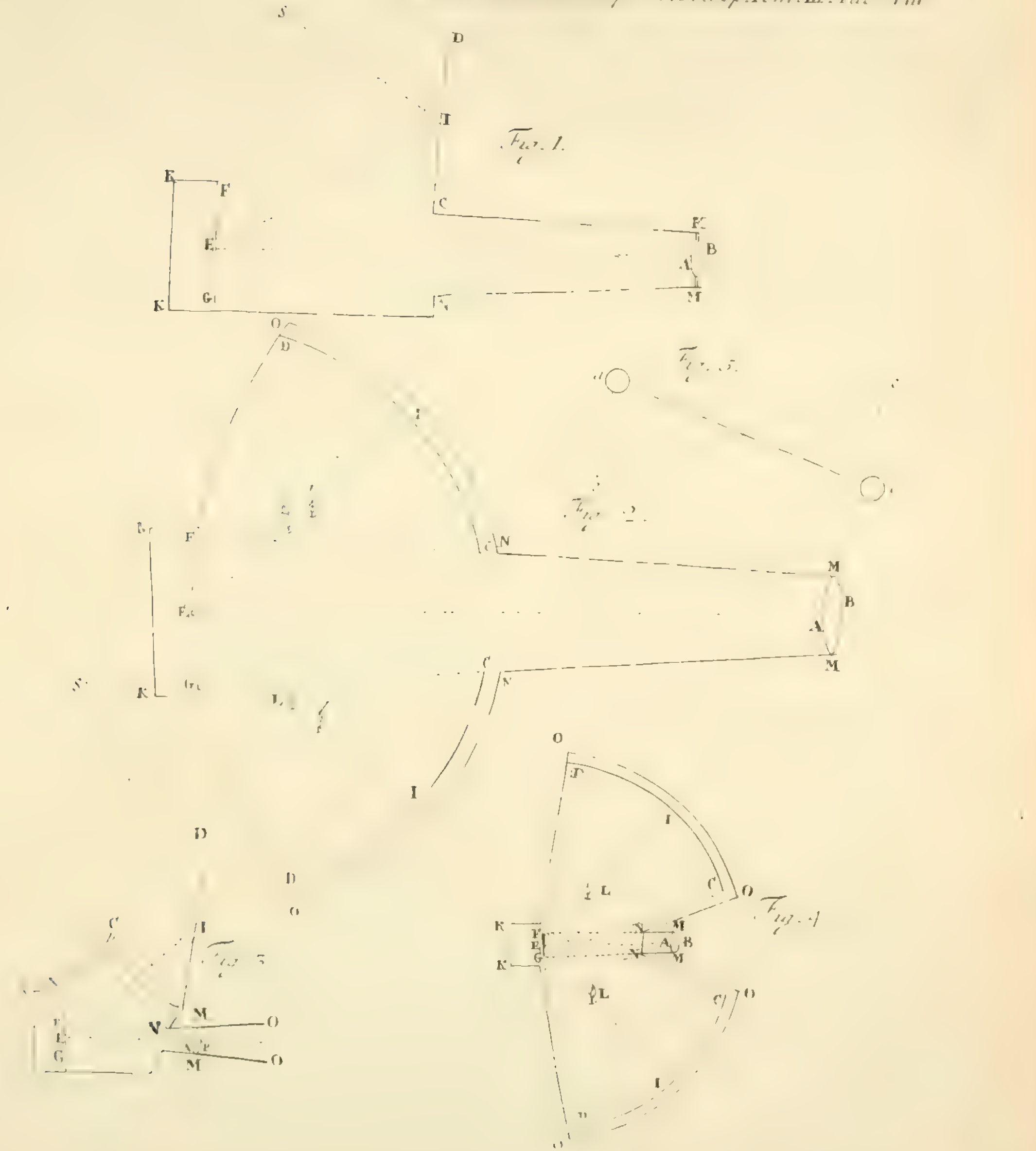
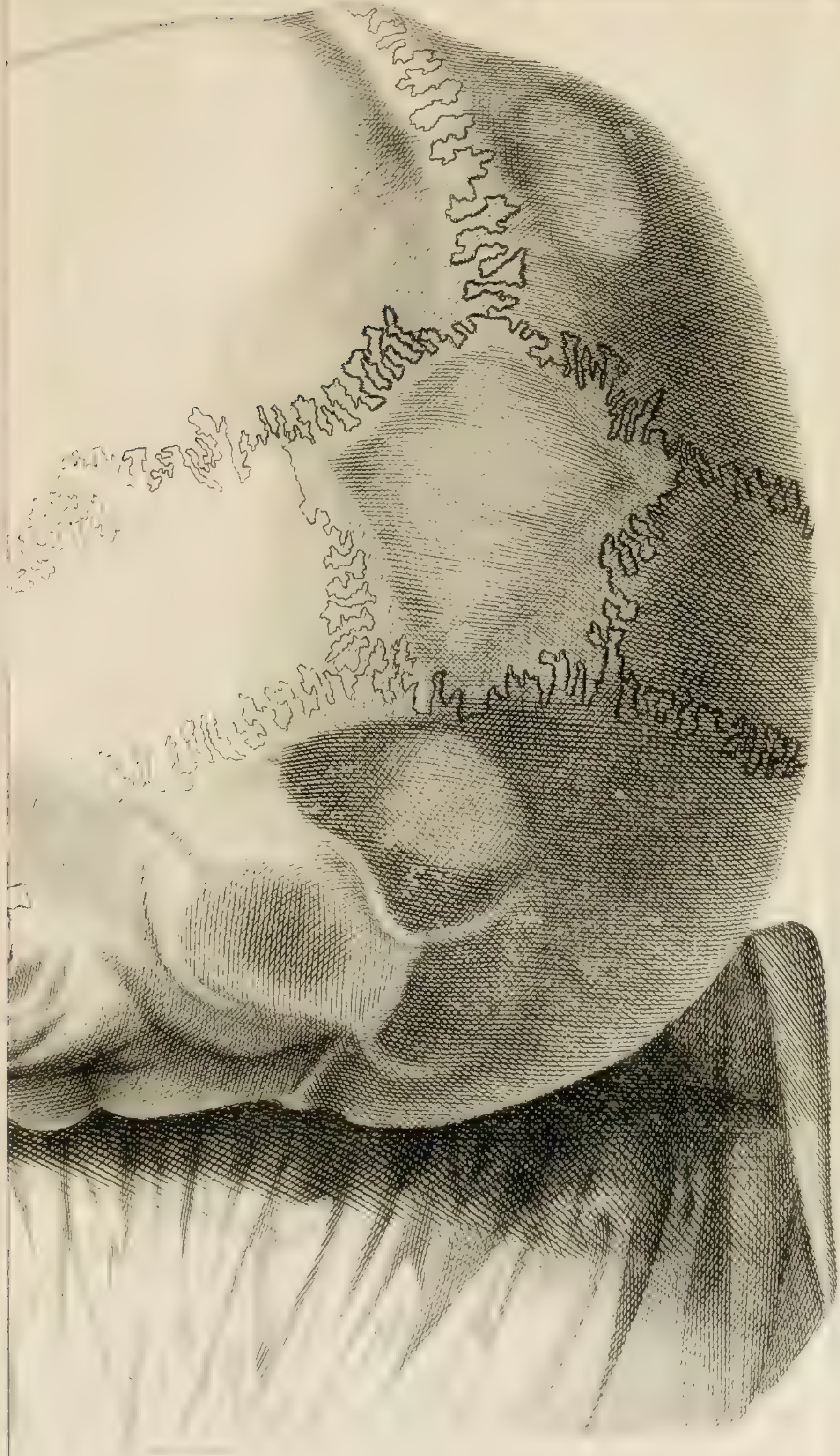


Fig. 4.

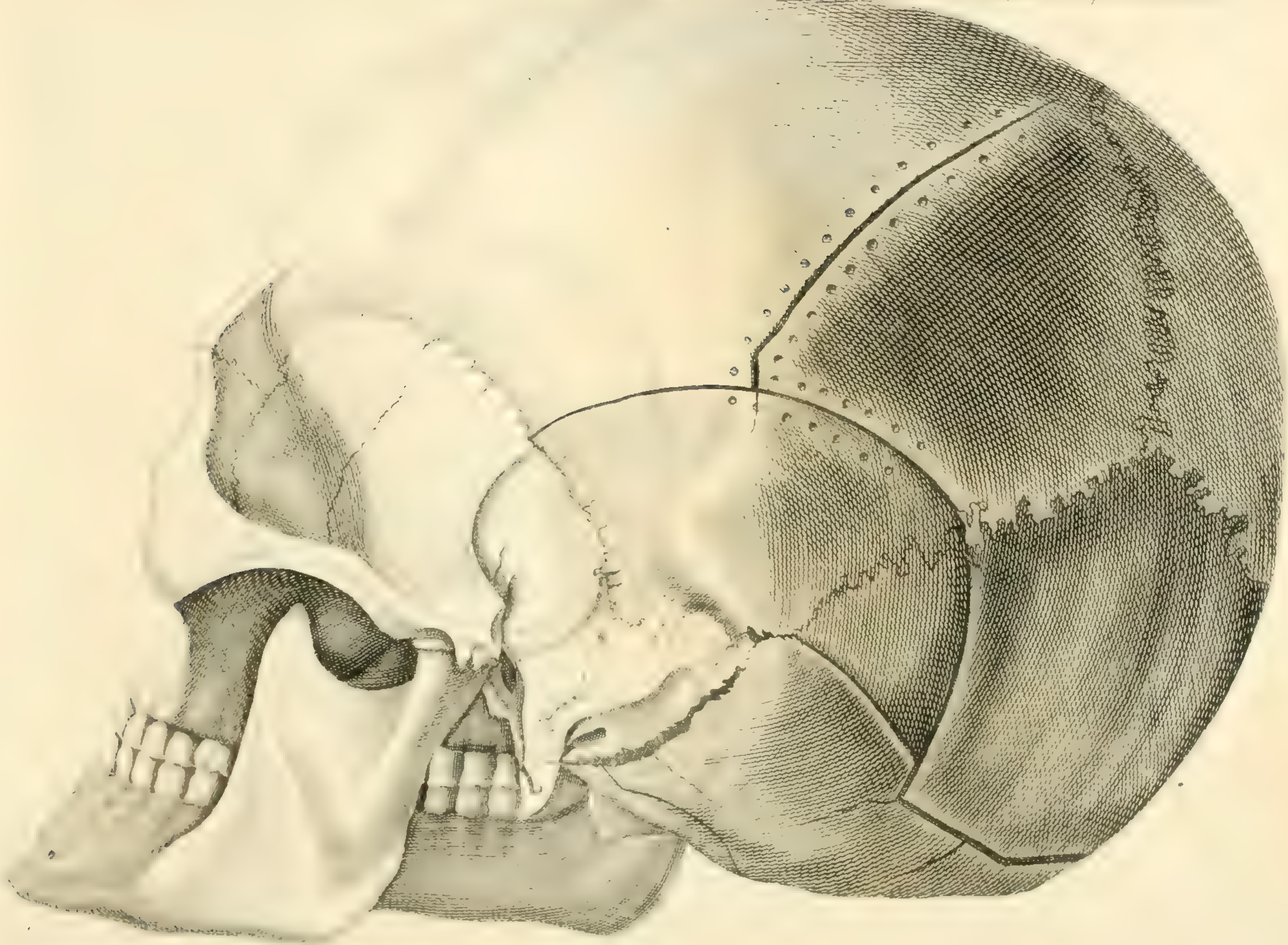

Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 4.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

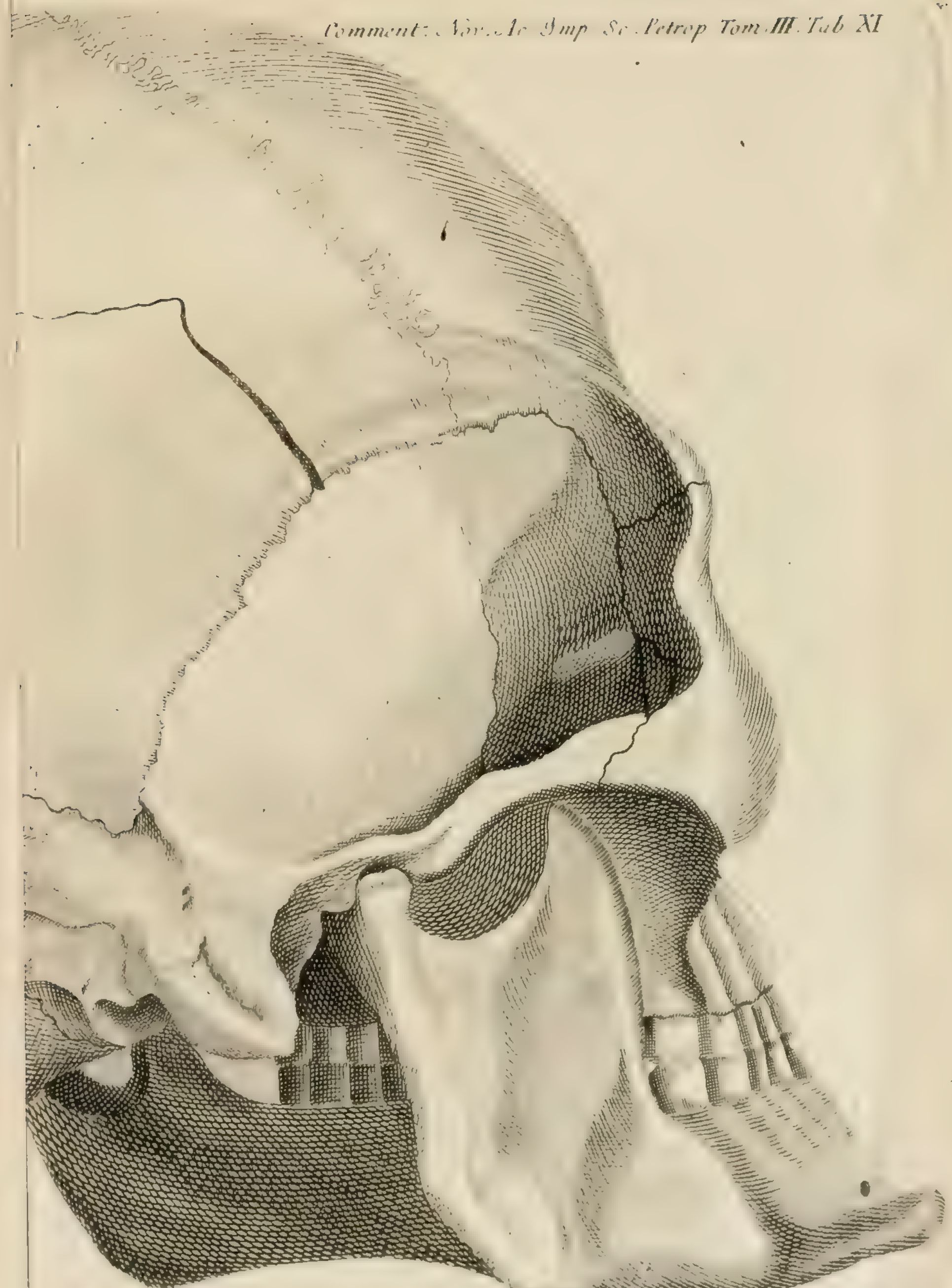


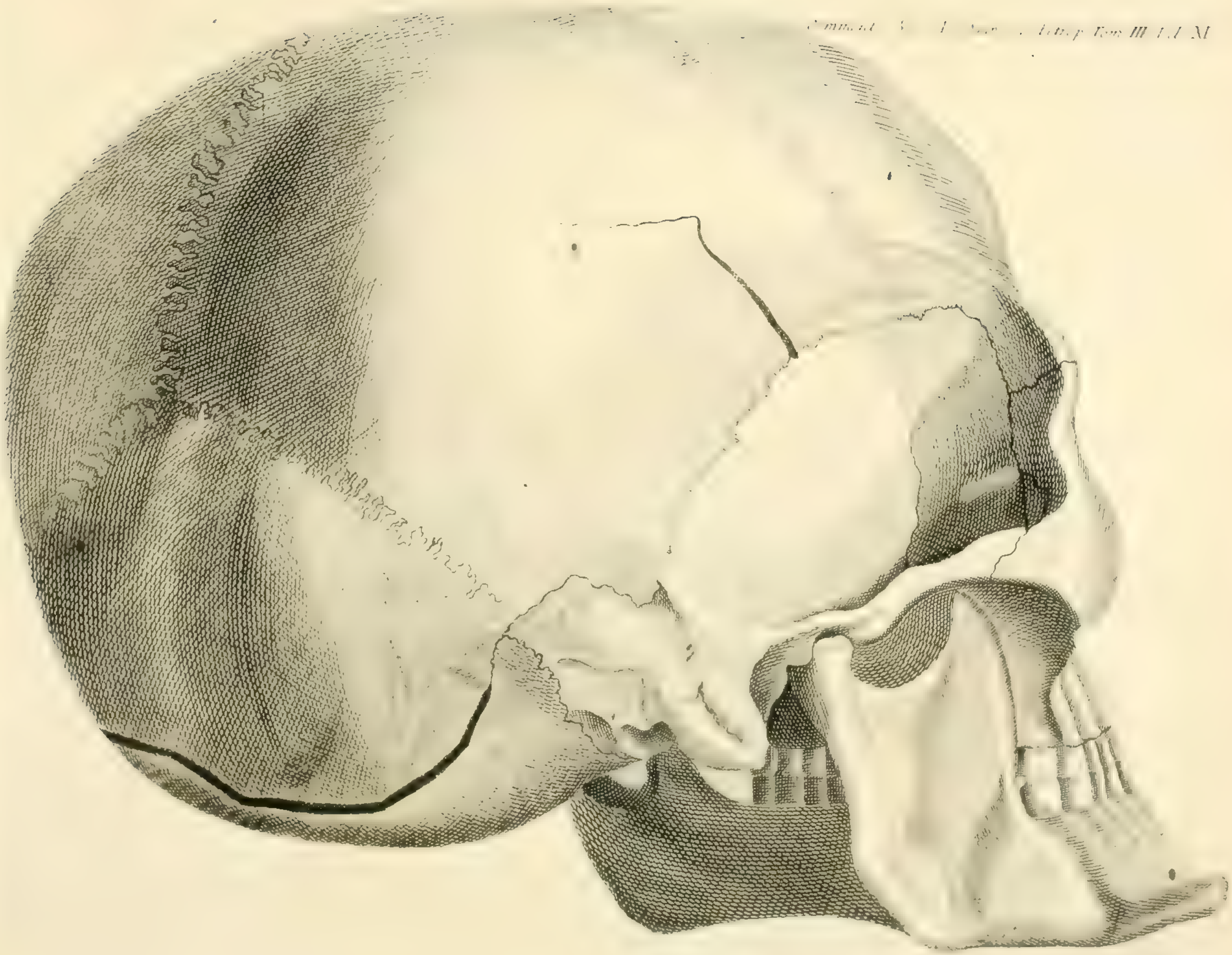






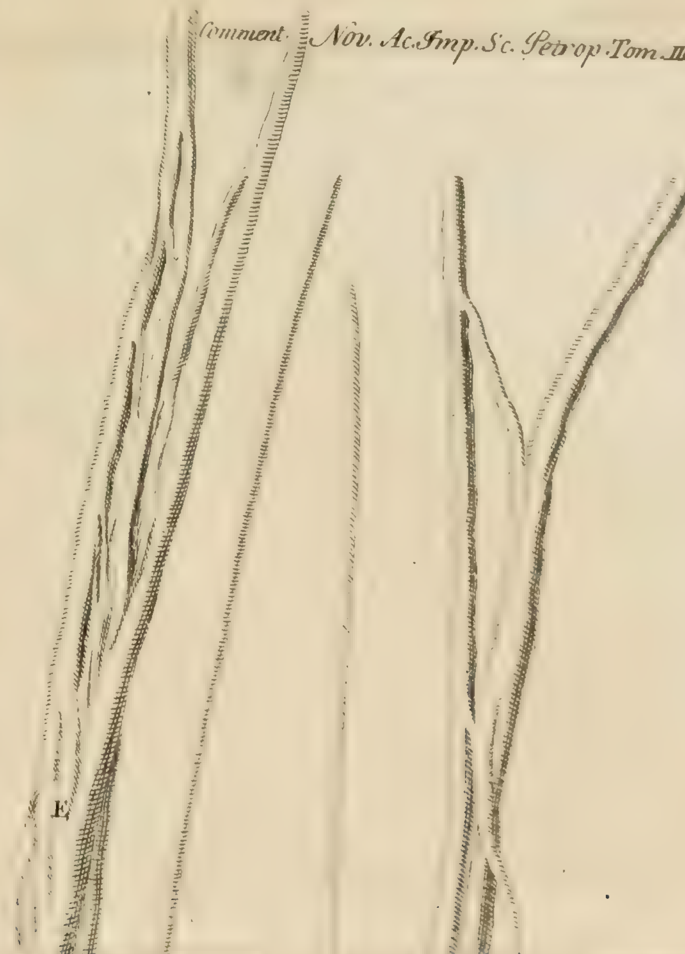
Comment: Nov. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. III. Tab. XI



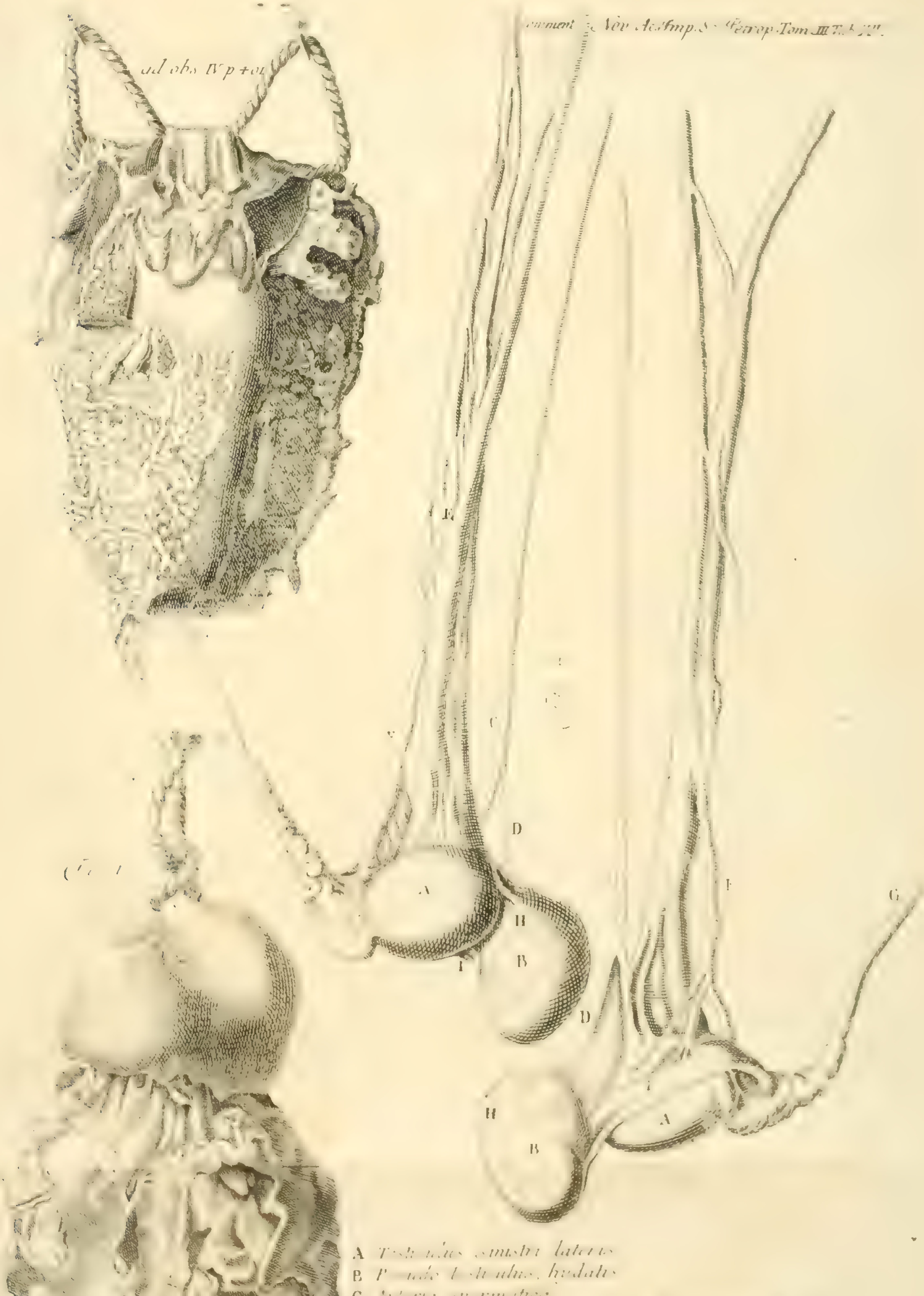


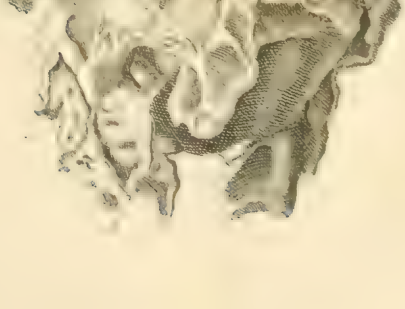
ad obs. IV. p. 404





ad obs. IV p. 401





A Teſticulus ſiniſtri lateris.
B Pſeudo teſticulus, hydatis.
C Arteria ſpermatica.
D Arteria ſpermatica in pſeudo teſticulum intrans.
E Venae ſpermaticae.
F Venae ad ſpermaticas e pſeudo teſticulo tendentes.
G Vas deferens.
H Vaſa venoſa et arterioſa pſeudo teſticuli.
I chorda ... teſticuli ad vas deferens producta
[illegible]

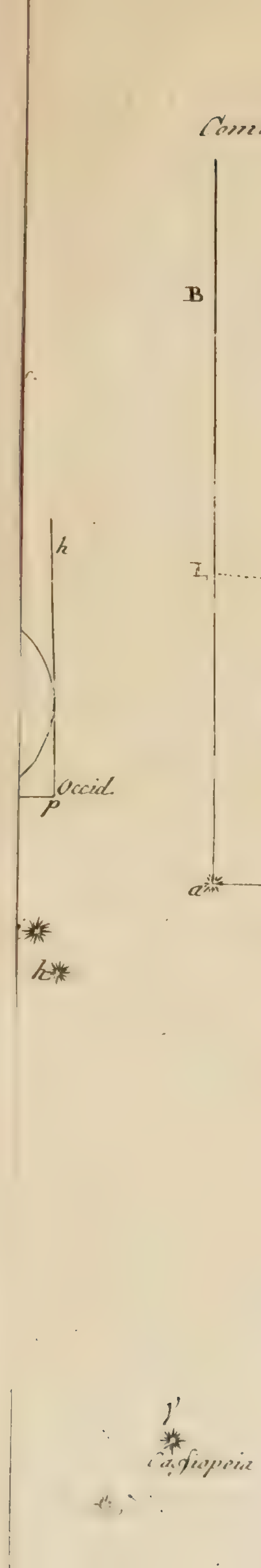


Fig. 2.

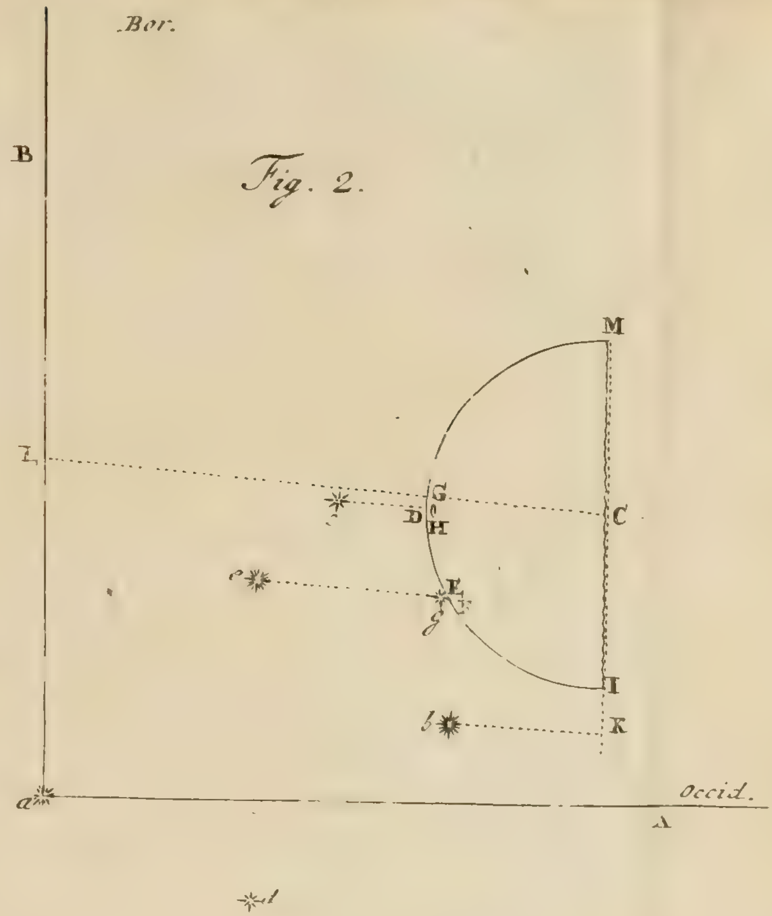


Fig. 5.

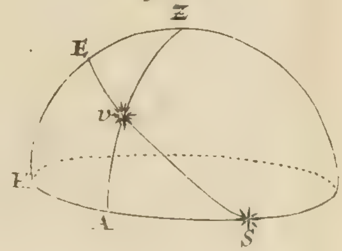


Fig. 1.


Ortus
Occas.
Mer

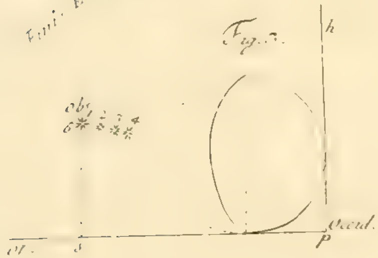
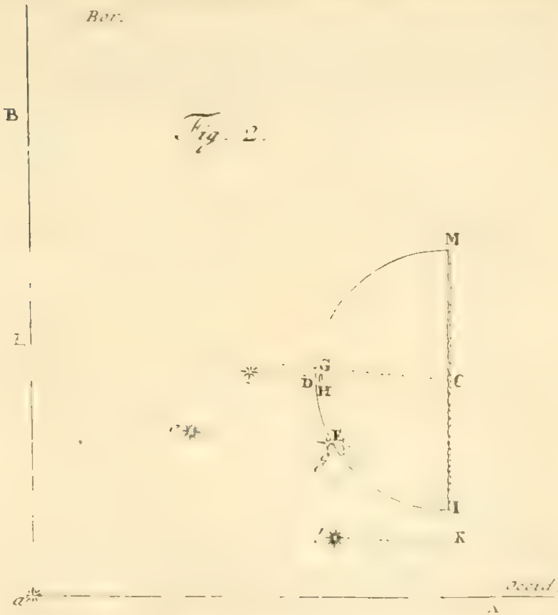
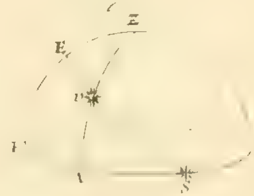

h
obs
Occid.
P

Fig. 2.


Bor.
B
M
G
D
H
C
E
I
K
a
Occid.


cepheus
Fig. 1


Z
E

AMNH LIBRARY
100125013